

日本船舶振興会昭和50年度補助事業  
“船舶の構造・性能に関する基礎的研究”

研究資料No.258

## 第162研究部会

### 舶用ディーゼル機関の排気脈動及び ガス流れに関する研究

#### 報 告 書

昭和51年3月

社 団 法 人  
日 本 造 船 研 究 協 会

## はしがき

本報告書は日本船舶振興会の昭和50年度補助事業「船舶の構造・性能に関する基礎的研究」の一部として日本造船研究協会が第162研究部会においてとりまとめたものである。

本研究では、第1に、大形二サイクル静過給船用ディーゼル機関について実測データを基にして排気管内の非定常現象をシミュレートする手法及び排気管の各仕切間を容器と見なす方法で排気脈動をシミュレートし各シリンダの圧縮圧力不整の原因を検討した。第2に、二サイクル機関の掃気ガス流れを実験的に調べ排気温度との関係を検討し排気脈動シミュレーションに必要な資料を得た。第3に、四サイクル中形機関の排気脈動シミュレーションプログラムを開発する第1段階として空気モデルに対するプログラムを单シリンダ機関用に整理の上計算を行い、一方单シリンダ機関による実験で脈動圧力のデータを得て、計算値と実験値の比較検討を行った。

## 委員名簿（敬称略、五十音順）

部会長 大東俊一（京都大学）	
委員 秋山貞夫（大阪市立大学）	東忠則（川崎重工業）
碓井建夫（大阪大学）	速藤肇（三井造船）
岡山透（日本海事協会）	大谷正樹（阪神内燃機工業）
近江宗一（大阪大学）	小松源一（姫路工業大学）
塙出敬二郎（船舶技術研究所）	清水滉（川崎重工業）
高須績（住友重機械工業）	田中絃一（石川島播磨重工業）
塙原茂司（船舶技術研究所）	永井将（日立造船）
東野一郎（大阪市立大学）	平山伝治（赤阪鉄工所）
船川正哉（川崎重工業）	前原二郎（三菱重工業）
正橋三津夫（阪神内燃機工業）	水町長生（東京大学）
溝口泰峰（佐世保重工業）	三宅裕（大阪大学）
村上和夫（日本鋼管）	山野弥一（ダイハツディーゼル）
由良忠義（京都大学）	

# 船用ディーゼル機関の排気脈動及びガス流れ に関する研究

## 目 次

第1編 緒論 .....	1
1. 研究内容の分類と分担 .....	1
2. 研究目的の概要 .....	1
2.1 二サイクル機関の排気脈動シミュレーション .....	1
2.2 二サイクル機関のガス流れに関する研究 .....	2
2.3 四サイクル機関の排気脈動シミュレーション .....	2
3. 動圧過給機関と静圧過給機関 .....	2
4. 動圧過給機関と静圧過給機関におけるシリンダ間の排気温度ばらつき .....	3
5. 大形静圧過給機関における排気温度のばらつきと対策 .....	3
6. 静圧過給機関排気温度を決める要因 .....	5
6.1 排気脈動 .....	5
6.2 計測法 .....	6
6.3 ガス流れ .....	7
6.3.1 シリンダ出口のガス流れ .....	7
6.3.2 バルスによるシリンダ出口の流れの乱れ .....	7
6.3.3 排気ポートから排気ポートへの流れの短絡 .....	7
6.3.4 ポートのつまりによる流れの変化 .....	8
6.3.5 エンジンプラント全体としてのフローパターン .....	8
6.3.6 となりのシリンダからのガスのまわりこみ .....	8
7. 静圧過給排気脈動研究の進め方 .....	8
7.1 圧力波の伝播を無視する方法 .....	9
7.2 準定常流れを解く方法 .....	9
8. 二サイクル機関ガス流れの研究の進め方 .....	9
8.1 ガス流れと排気温度の指定の関連 .....	9
8.2 静模型、動模型による実験データの比較等 .....	10
9. 四サイクル機関排気脈動研究の進め方 .....	10
10. むすび .....	10
第2編 二サイクル機関の排気脈動シミュレーション .....	12
1. 排気管の各仕切間を容器とする脈動シミュレーションおよびこの方法の適用限界の推定方法 .....	12
1.1 一次元実験装置 .....	12
1.2 理論 .....	13
1.2.1 仕切間を容器とみなす取扱い(簡便法) .....	13
1.2.2 一次元非定常圧縮性流体の特性曲線法による取扱い .....	13

1.2.3 境界条件	14
1.3 簡便法の適用限界推定法	16
1.3.1 実験値と理論値の比較	16
1.3.2 絞り板の穴径および枚数の影響	18
1.3.3 エネルギ式も考慮した解析	19
2. 二次元流れの解析	21
2.1 有限要素法による二次元流れの解析	21
2.1.1 Implicit Method	21
2.1.2 Two Step Lax-Wendroff Method	28
2.2 特性曲線法による二次元流れの解析	30
2.2.1 二次元非定常圧縮性流体の基礎方程式	30
2.2.2 二次元特性曲線法	31
2.2.3 積分法	32
2.2.4 結果	32
3. 実験装置の設計製作	32
付録A	
A-I 特性曲線法	34
A-II 数値計算	34
A-III 境界における特性曲線法	36
付録B	
B-I 特性曲線法による数値計算	38
B-II 境界における特性曲線法	40
付録C	
C-I Newton-Raphson法	42
付録D	
D-I 二次元非定常圧縮性流体の基礎方程式	44
D-II 二次元特性曲線法	46
D-III 積分法	51
付録E	
E-I 一次元特性曲線法のフローチャート	56
E-II 有限要素法のフローチャート	57
E-III 二次元特性曲線法のフローチャート	58
参考文献	59
第3編 二サイクル機関の掃排気ポート付近およびシリンダ内のガス流れの研究	60
1. まえがき	60
2. 定常流 260φ 掃気実験装置の製作と実験	60
2.1 定常流 260φ 掃気実験装置の製作	61
2.2 定常流 260φ 掃気実験—(定常流による掃気期間のガス流れ調査)一	61

2. 2. 1 掃気係数	61
2. 2. 2 掃気孔の流量係数	63
2. 2. 3 掃気期間中のシリンダ内圧力変化について実機例と定常流実験との対比	64
2. 2. 4 掃気孔開口度の変化によるシリンダ内 Flow Pattern の変化	65
2. 2. 5 Jante の方法とシリンダ内 Flow Pattern	66
3. 一サイクル非定常実験装置(駆動模型)の設計製図	83
3. 1 駆動模型(シリンダ径 130φ)の設計	83
3. 2 一サイクル非定常流実験装置	83
4. まとめ	83
<b>第 4 編 四サイクル機関の排気脈動シミュレーションの研究</b>	<b>91</b>
1. まえがき	91
2. 計算プログラムの整理、作成	91
3. 四サイクル単筒機関によるデータ採取	91
4. 上記機関のデータと計算値との比較	92

# 第1編 緒論

本編では昭和50～53年度にわたって行なわれる標題の研究について全般的な解説を行なうが、2章で研究目的について簡単にふれたあと、3～6章において本研究の必要性について詳しく説明する。特に二サイクル静圧過給機関の排気脈動問題に関する系統的な研究には、本研究が内外における初めての試みと思われる所以、問題点を鮮明にするため、かなりの紙数をさいた。

## 1. 研究内容の分類と分担

本研究の内容は大まかに三つに分類される。研究項目と実施担当者を示すと次の通りである。

- (a) ニサイクル機関の排気脈動シミュレーション（川重技研）
- (b) ニサイクル機関のガス流れ（姫路工大、川重技研）
- (c) 四サイクル機関の排気脈動シミュレーション（船舶技研）

## 2. 研究目的の概要

研究の必要性についてあとで詳しく述べることにして、本節では得られるべき作業結果としてどのような形をねらっているかについて簡単にふれる。

### 2.1 ニサイクル機関の排気脈動シミュレーション

静圧過給機関のシリンダ出口排気温度は大まかにみてそのシリンダの熱負荷の目安であるほか、ガス交換の良否の目安でもあると従来から考えられており、信頼度ならびに性能の面からできるだけシリンダ間のバラツキの少ないことが望ましい。しかし、船用大形静圧過給機関では、従来シリンダ出口排気温度が大きくばらつくことが経験されているが、これまでの経験からその主な原因のひとつとして排気脈動があげられている。

他方、機関型式が同一であっても、排気管形状等、排気脈動に影響を与える要因の変更されることが現実にはあり、さらに機関は今後もますます高過給化される方向にあるので、この問題は今後むしろきびしくなるものと予想されている。

そこで本研究では現在ならびに将来のこの種の問題に迅速に対処するための手段として、実用的な排気脈動シミュレーションプログラムを開発し、この種の機関の信頼性と性能向上に役立たせようとするものである。

なお、排気温度ばらつきの原因については、排気脈動の他にもいろいろあると考えられ、これを裏づけるような実機データもあるが、これについては第3章で詳しく述べる。

### 2.2 ニサイクル機関のガス流れに関する研究

排気温度については、現在エンジン監視用に使っている排気温度計の示す数値を決定している主な要因には何があるのかということと、排気温度はほんとうに熱負荷を示すのか、という疑問がある。

そこで、本研究では、現在船用エンジンで用いられている排気温度計の示す温度とガス流れの関係を主として調べる。そのほか、本研究では排気脈動シミュレーションを行なう際に必要とされるシリンダポート附近の流れに関する実測データをあつめる。

### 2.3 四サイクル機関の排気脈動シミュレーション

現在のところ、四サイクル中速機関はほとんど動圧過給を採用しており、稼動中の機関で静圧過給を用いているものは、多くはない。四サイクル機関では、排気管長 2 ~ 3 m 以下、機関回転数 1000 rpm 附近のものでは、排気脈動シミュレーションは圧力伝播を無視する計算法そのままを用いるか、またはこれに若干の修正を加えるだけで十分間に合う。

他方、比較的大形の四サイクル機関では排気管が長くなり、圧力波が互いに干渉するため排気脈動はかなり複雑な波形になる。

このような機関では、給排気弁のよごれに関連して、あるいは性能計画に関連して排気脈動が問題にされるケースが多い。他方日本船用機関学会では S46~48 年にかけて四サイクル機関の性能シミュレーションの研究を実施しており、さらに船舶技術研究所では S46 年頃から動圧過給方式の排気脈動に関する研究が行なわれている。

そこで本研究では、船研で行なわれて来た研究を土台にして、四サイクル動圧過給機関用の実用的な脈動シミュレーションプログラムを開発し、これと SR130 で開発された性能シミュレーションプログラムを結合することにより、実機を対象にした排気脈動シミュレーションを開発して一般に公開しようとするものである。

### 3. 動圧過給機関と静圧過給機関

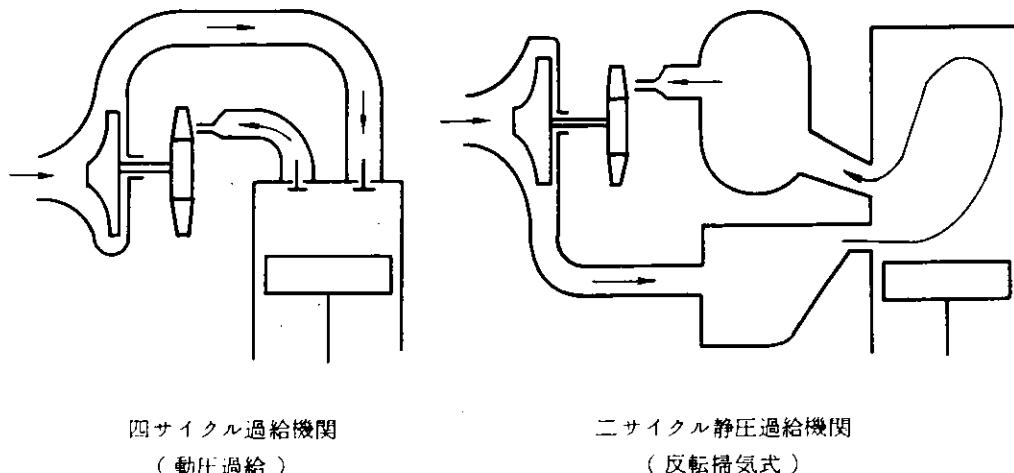


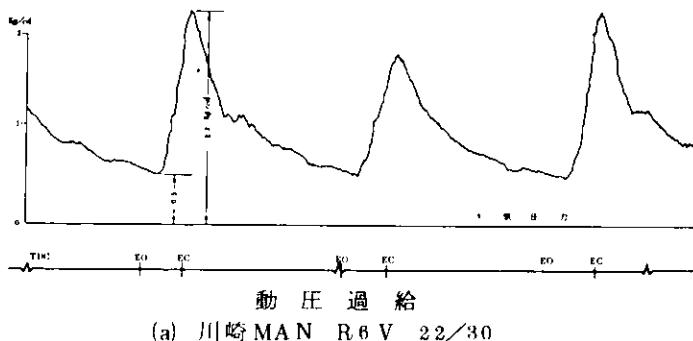
図 1.1 過給機関

図 1.1 に示すように、シリンダから排出される排気ガスでタービンを駆動し、このタービンで圧縮機を駆動して高密度の空気をシリンダ内に押し込み、平均有効圧力を高めることを排気ガスタービン過給と言っており、シリンダから出た排気ガスの利用法の違いにより、動圧過給方式と静圧過給方式に分けられる。

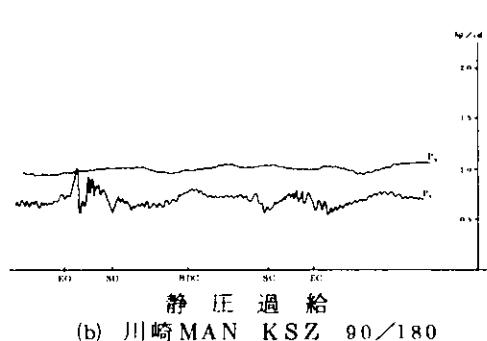
動圧方式はシリンダから出る高速ガスのもつエネルギーを、細い排気管によってタービンに導く方法であり、この方式の場合は図 1.2(a)の例に示すように排気管内の圧力変動はかなり大きい。この方式は平均有効圧力が低い場合に有利な方法であるため、古くから用いられており、現在では自動車用小形機関から船用大形機関のほとんどすべての機関で動圧方式が用いられている。

他方、静圧過給方式はシリンダから出るガスを容積の大きい排気管に導いて、図 1.2(b)の例のように排気管内の

圧力をほとんど一定にしてタービンに導く方法である。この方式は平均有効圧力が高い場合に有利な方式であり、例えば川崎-MAN二サイクル大形機関では  $P_e = 7 \sim 8 \text{ Kg/cm}^2$  以上で静圧方式が有利であるが、四サイクル機関では  $P_e \approx 20 \text{ Kg/cm}^2$  以上で静圧方式が有利であろうと言われている。船用大形二サイクル機関で静圧方式が用いられているのは、MAN, Sulzer エンジンが主であり、四サイクル機関では現在のところ三菱重工のみが 静圧過給方式を用いているようである。



(a) 川崎 MAN R6V 22/30



(b) 川崎 MAN KSZ 90/180

図 1.2 排気脈動の計測例

このように動圧方式は歴史が古く使用範囲が広いのに比べて、静圧過給はその歴史は非常に浅く、使用されている範囲は限られている。

#### 4. 動圧過給機関と静圧過給機関におけるシリンダ間の排気温度ばらつき

多シリンダ機関のシリンダ出口排気温度は、大まかにみてそのシリンダの熱負荷を示す尺度と考えられるほか、特にボート掃気機関ではそのシリンダの新気充填量の多少を示す尺度とも考えられ、エンジン性能ならびに信頼度の点からはできるだけ均一であることが望ましい。

ところで、動圧過給二サイクル大形静圧過給機関では、2～3個のシリンダが細い排気管を介して一個の過給機に連通されており、図1.3は3の倍数のシリンダをもつ機関におけるシリンダ、排気管、過給機の連通形式の例である。このような動圧過給方式の機関ではシリンダと過給機の連通形式とか、着火順序によって、特定のシリンダの出口排気温度は高くならざるを得ないことがある。したがって動圧過給機関では、排気温度のもつ意味を評価する場合に、上記のような事情を考慮に入れなければならない。

他方、静圧過給機関では全シリンダが一本の太い排気管に連通されており、排気管本管の中の流れが比較的楽であると考えられるので、シリンダ出口の排気温度は比較的均一になるものと期待されていた。

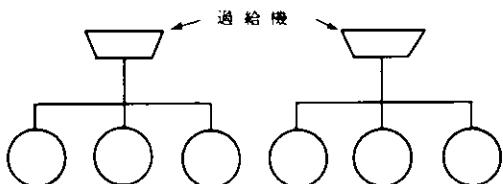


図 1.3

#### 5. 大形静圧過給機関における排気温度のばらつきと対策

ここでは主として川崎 MAN KSZ ディーゼル機関 (Kreuz Kopf Zweitakt Diesel Motoren—クロスヘッド型二サイクル機関) で経験されていることを中心に話をすすめる。

先ず図1.4によりエンジンの構造を簡単に説明する。図に示すようにシリンダ内の掃除は掃気管からシリンダを経て排気管に流れる掃気流によって行なわれるが、この掃気流を生じさせている掃気管と排気管の圧力差  $\Delta p$  は通常  $0.2 \sim 0.3 \text{ Kg/cm}^2$  である。KSZ 機関では必要空気量の大部分を排気タービン過給機によりまかなうが、これで不十分な場合はピストンの下部を空気ポンプとして使う。使用される下部ポンプの数は機関により、まちまちであるが、何れにしても下部ポンプを使うことは効率の低下を意味し、エンジン性能の点からは下部ポンプを使用しない方がよい。

図1.5はKSZディーゼル機関のシリンダ出口に監視用として装着されている排気温度計である。この温度計は特定数が大きいので、計測される量は時間的な変動をおしならした平均温度であるが、現在のところ温度の絶対値そのものに明快な物理的解釈は下し難く、各温度計の示す値を相対的に比較することにより、各シリンダの排気温度のばらつきを知るためとか、温度計の読みが変化したことにより、特定のシリンダまたは機関全体の運転状態が変化したことを知るのに利用されている。

図1.6はシリンダ全体の平均温度

の数例であるが、負荷が25%上昇する毎に排気温度は約50°C上昇している。大型機関では10%程度の出力増大を行なう場合でも、試運転は極めて慎重に行なわれるが、慎重にならざるを得ない理由のひとつが熱負荷の増大することへの配慮である。したがって、排気温度が熱負荷の目安を与えるものであれば、全シリンダの排気温度がほぼ均一になる

と期待される静圧過給機関においてシリンダ間の排気温度がばらつくことは好ましくないが、現実には大型静圧過給機関においてシリンダ出口排気温度が大きくばらつくことが経験されており、図1.7はその一例である。

排気温度ばらつきの原因はいろいろ考えられるが、これまでとられて来た対策は、ガス交換中にシリンダ出口に現われる排気運動が各シリンダで異なり、このために各シリンダの新気充填量がばらつくことによる、という推定に基づいている。具体的に言えば、脈動の形を変えるために排気管の中にしづり板をそう入しているが、しづり比( $d/D$ )、しづり板の枚数、そう入すべき位置等は予めこれまでの経験をもとに定められ、試運転の結果をみてばらつきの範囲が50°C以内におさまるまでしづりのそう入条件を逐次修正する。現在設けられている排気温度ばらつきの許容範囲50°Cは特に根拠があって定められたものではない。

このような対策を施しても、排気温度の分布が均一化され難い場合は、下部ポンプの数を追加して排気温度全体のレベルを下げるが、その分だけ効率は低下することになる。

図1.7はこのような対策を施した一例であるが、大まかにみれば圧縮始めの圧力を均一にすると、排気温度は均一化される傾向にあり、このことは、排気温度のばらつきに関する上記のような推定と、これに基づく対策が大まかにみて正しいことを裏づけていると考えられる。しかし、このような因果関係が必ずしも当てはまらない例が過去に少なくなく、排気温度ばらつきの原因は他にもあることを示唆している。

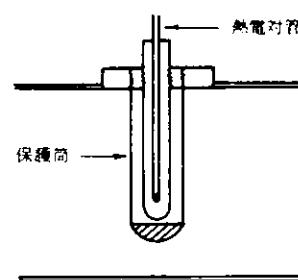


図1.5 排気温度計

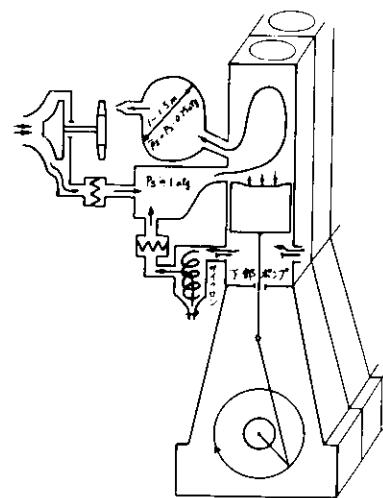


図1.4 川崎-MAN  
KSZディーゼル機関

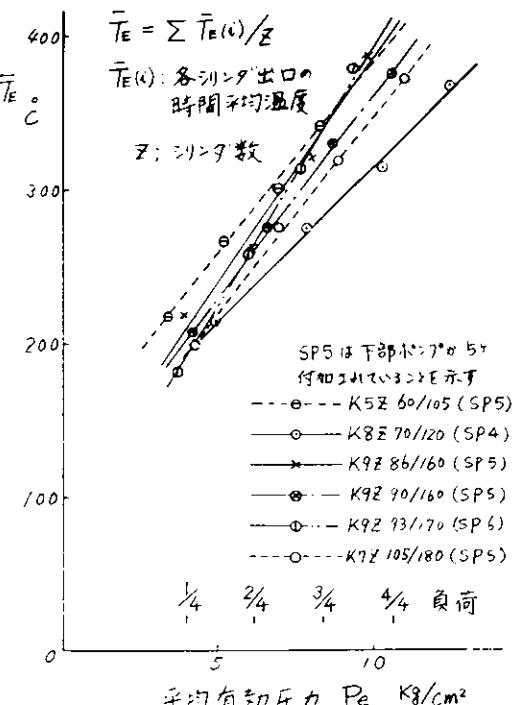


図1.6

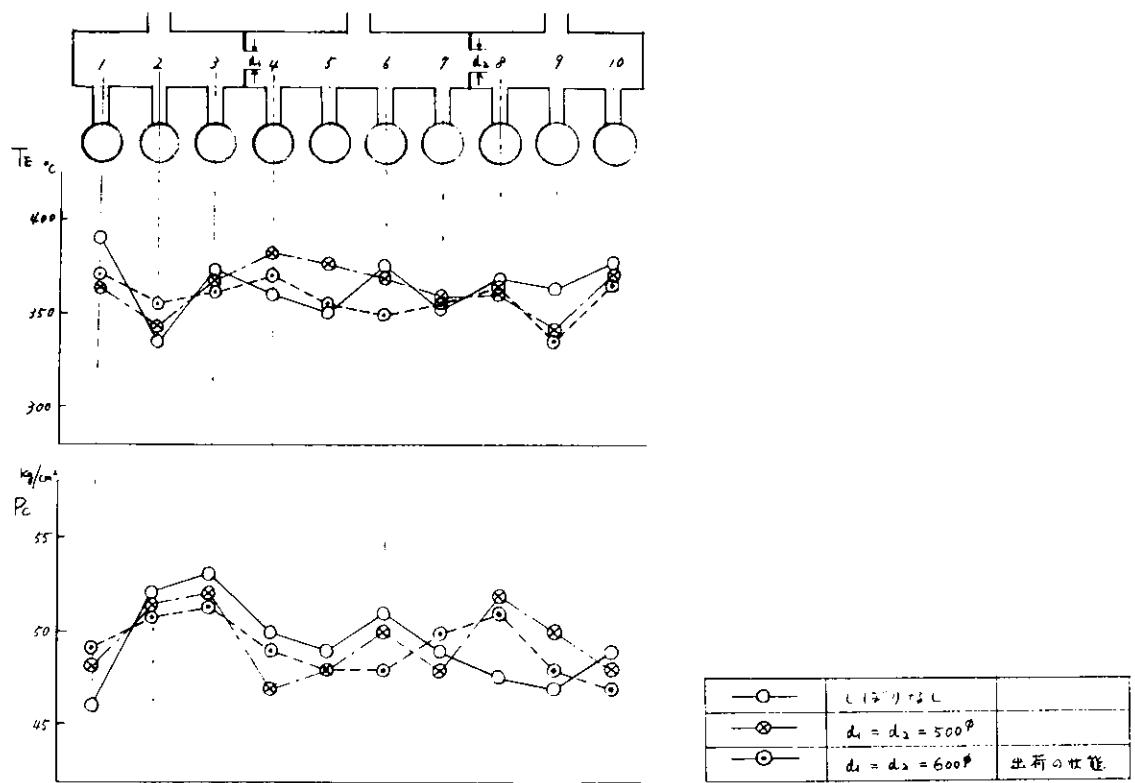


図 1.7

## 6. 静圧過給機関排気温度を決める要因

前章において、大形二サイクル静圧過給機関で経験されている排気温度ばらつきの原因是、これまでの実機データによると排気脈動のみではなさそうであることを説明した。

シリンドラ出口に接着されている排気温度計は、ブローダウンのときの高温ガスとガス交換のときの吹き抜け空気により、加熱と冷却がくり返され、温度計は加熱による温度上昇分と冷却による温度下降分の平衡点を指示するが平衡点を決める要因と個々の要因が果たしている役割の大きさが明白になれば、排気温度ばらつきの原因がはっきりするばかりでなく、排気温度のもつ物理的な意味もはっきりする。現在のところ、この平衡点に影響する主な要因と考えられるものは、(1)排気脈動 (2)計測法 (3)ガス流れ等である。排気脈動の問題は結局のところ、掃気ポートと排気ポート間の圧力差によって生ずるガス流れの問題に帰着するが、主として排気脈動によって生ずるガス流れを(1)の項目、それ以外の原因で生ずるガス流れを(3)に含めることにして、以下では上記(1)～(3)について考察する。

### 6.1 排気脈動

図 1.8 の反転掃気式機関においてピストンが爆発行程を終えて上昇行程にあるとき、ピストンが SC から EC まで移動する間はシリンドラ内に充填された空気がピストンによって排気管へ押し出される。

しかし、この間にシリンドラ出口の圧力、すなわち排気脈動が適当に大きければ、シリンドラから排気管へガスが押し出されるのを防ぐことができるので、それだけシリンドラ内に充填される空気量は多くなり、圧縮始めの圧力は大きくなる。

燃料投入量が同一のとき、シリンドラ内の新気の量が多ければ燃焼ガスの温度は低くなり、排気温度は低くなる筈

である。

すでに述べたように、排気温度にはばらつきのある機関では圧縮始めの圧力  $P_1$  をできるだけ均一にするような方策を施しているが、これは「上に述べたような現象の逆も又真である」という仮定に基づいている。すなわち、 $P_1$  が高いシリンダは新気充填量が必ず多いということを仮定している。しかしこれを説明するにこの仮定は必ずしも正しいとは言い難く、 $P_1$  の高いシリンダで必ずしも排気温度が低くないのはこのような仮定の甘さにも一因があると思われる。

ここでガス交換のキャリアと  $P_1$  ならびに  $T_E$  の関係について模型的に考察してみよう。図 1.9(a)は何れも  $P_1$  は高くなるが、①はガス交換中のシリンダ出口排気圧力(排気脈動)が大きいため、すなわち掃気圧力と排気圧力の差が小さいため、掃気管から排気管へ吹き抜ける空気量ならびにシリンダ内にためられる新気の量は極めて少ないのである。その結果  $P_1$  が高いために排気温度は高くなるものと思われる、図 1.7 の M1 Cy 1. はこのような例ではないかと思われる。図 1.9 の②の場合は空気の吹抜け量、充填量共に多く、排気温度は低くなると考えられる。次に図 1.9(b)は  $P_1$  が低く現われる場合であるが、排気温度は③が④よりも高くなるであろう。

以上の考察を要約すれば、排気脈動は排気温度に影響する要因ではあるが  $P_1$  の高低と排気温度の高低が 1 対 1 の対応をしているとは考えられない。しかし、シリンダについて、ガス交換中の排気脈動が同じになれば、ガス交換の過程がほぼ同じになり、掃気状態、新気充填量ともにばらつきがなくなり、エンジンにとっては好ましい状態になるであろう。

しかし、ガス交換中の排気脈動が同じであることは、必ずしも排気温度が同じになることを意味するものではない。

## 6.2 計測法

排気温度計の示す平衡点に影響する要因の中で、計測法と関連のあるものは次の諸項目と思われる。

(1) 温度計自身の伝熱特性、すなわち温度計と温度計をとりついている壁との間に熱の流れがない状態での時定数の大小は、平衡点の位置を決める要因であろう。排気温度の物理的な意味を的

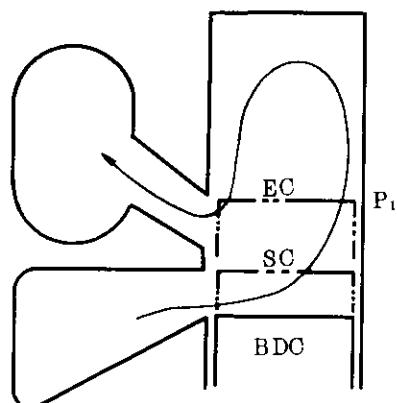
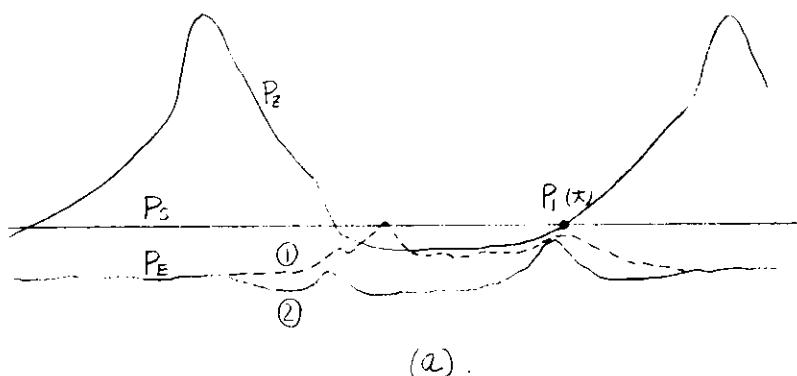
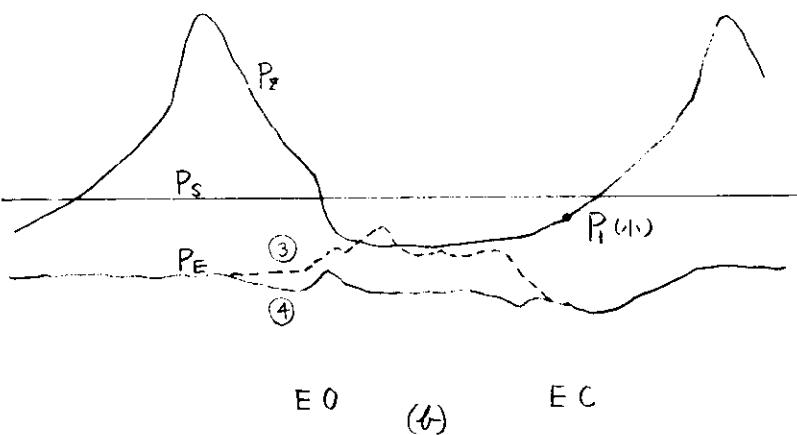


図 1.8



(a)



(b)

図 1.9

確に知るためには、時定数とガスの流速、温度等の関係のほか、このような特性をもった温度計が、高温ガスと低温ガスが交互に流れれるような流れの場におかれたときに、どのような平衡点を示すかについて知る必要があると考えられる。

- (2) さらに、温度計と取付壁の間の伝熱は、温度計をとりつけた状態での応答速度、ならびに指示する数値に影響を与える筈である。
- (3) ガスは通路断面上均一な流れではなく、流速、温度ともにある分布をもっていると思われる。したがって、温度計の取付位置、傾き  $\alpha$  等は温度計が指示する値に影響する。KSZ ディーゼル機関では、これまで何回かの実機計測を基にして最も合理的と思われる標準取付法を定めているので、取付方法は温度のはらつきには関係がないと思われる。(図 1.10)

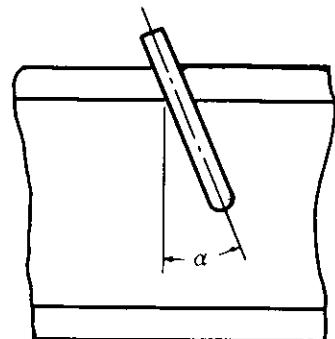


図 1.10

### 6.3 ガス流れ

ガス流れの問題はミクロなものとマクロなものに分類できる。前者に類するものとしては(1)排気脈動とガス流れの問題 (2)シリンダ出口のガス流れ (3)パルスによるシリンダ出口の流れの乱れ (4)掃気ポートから排気ポートへの流れの短絡 (5)ポートのつまりによって生ずるシリンダ内～シリンダ出口に至るフローパターンの変化等がありマクロに属する問題としては(6)エンジンプラント全体としてのフローパターン (7)となりのシリンダからのガスのまわりこみ等がある。(1)については 6.1 でふれたので(2)～(7)について考察する。

#### 6.3.1 シリンダ出口のガス流れ

排気温度はシリンダと排気管本管のつなぎの部分にそう入されているが、この部分の X Y Z 方向のフローパターンは、温度計の指示する数値の大きさに直接影響を与える。(図 1.11)

すでに述べたように、温度計の取付位置については、実機の計測結果を基にして最も合理的と思われる標準的な位置を決めているが、(a)温度計をとりつける位置の適否を判断する資料のひとつとして、(b)また排気脈動シミュレーションを行うときの境界条件を設定するための資料として、シリンダ出口のフローパターンを調査する必要がある。

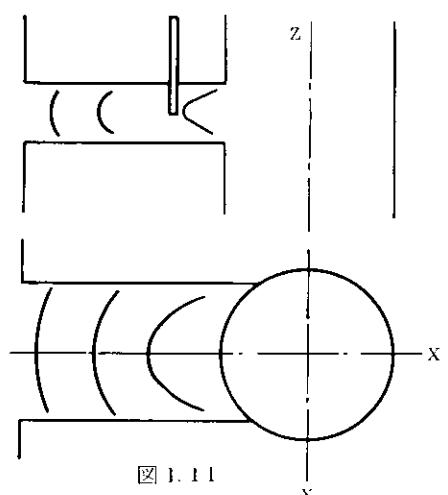


図 1.11

#### 6.3.2 パルスによるシリンダ出口の流れの乱れ

シリンダ内の掃気流が正常に流れているとき、脈動本管からつなぎ管を経て、シリンダ出口へパルスが伝播して来ると、つなぎ管内の流れが乱され、これが排気温度の指示する値に影響することが考えられる。(図 1.12)

ポート掃気式の機関では、掃気ポートがつまることがあるが、ポートつまりの原因のひとつとして、パルスによって掃気流が乱されるとか、または逆流が生じ掃気ポイント附近に燃焼残物の附着することが考えられる。

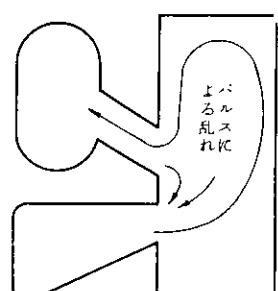


図 1.12

#### 6.3.3 掃気ポートから排気ポートへの流れの短絡

シリンダ内ガス流れの本流は、シリンダ内を大きく反転する流れであるが、この他に掃気ポートから排気ポートへ流れが短絡することがある。(図 1.13)

この短絡流れがどのような条件のときに生じ、これが排気温度計の指度にどの程度影響するかについては現在のところ不明である。

#### 6.3.4 ポートのつまりによる流れの変化

四サイクル機関では排気の逆流により、給気弁のよごれがあるが、ポート掃気式二サイクル機関では掃気ポートがよごれ、孔の大きさの極端に小さくなることがある。

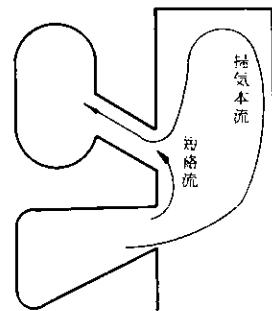


図 1.13

ポートのつまりがシリンダ内の流れに与える影響については、これまでも簡単な実験研究が行なわれているが、シリンダ内ポート附近、つなぎ管等を含めた流れがどのように変わるか、さらにこのような流れの変化が排気温度の指度にどのように影響を及ぼすかについては不明である。

#### 6.3.5 エンジンプラント全体としてのフローパターン

エンジンは空気圧縮機の空気吸入口から掃気管、シリンダ、排気管、排ガスタービンを経て排気導管から大気への放出に至るガス流れの通路である。

したがって、特に脈動その他の要因がなくとも流れに対する抵抗が大きいか小さいかによって、特定の方向ではガスが流れやすいとか、流れにくい等のパターンがあり、各シリンダのこれが掃気の良し悪し、新気充填量、排気温度計の指度等に影響を与えることが考えられる。（図 1.14）

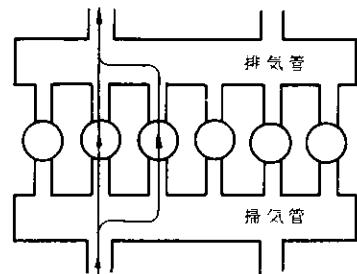


図 1.14

#### 6.3.6 となりのシリンダからのガスのまわりこみ

例えば、図 1.15 のような配列をしているエンジンがあるときとなりのシリンダからガスのまわりこみが起りうるときは、16.3 シリンダへのまわりこみが最も多く、これが排気温度の指度に若干の影響を及ぼすと思われるが、このような考え方方が正しいかどうかについては現在のところ不明である。

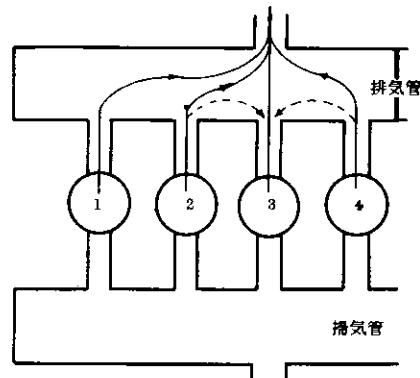


図 1.15

### 7. 静圧過給排気脈動研究の進め方

すでに述べたように、静圧過給は歴史が浅く、使用されている範囲もせまいので、静圧過給機関の排気脈動に関する研究は公表されている例がない。

さらに、静圧過給方式は全シリンダが一本の排気管に連通されているので、構造的には動圧方式よりも簡単である。しかし、静圧過給排気管では多くのシリンダから吹き出したガスが本管へ直角に合流しており、さらに合流部分は面積が急拡大し、本管の中はしほり板、エキスパンション等によって流れがしほられている等、流れを解析する立場からみると、動圧過給排気管よりもはるかに複雑な形状である。したがって静圧過給の場合は、動圧過給方式のように、排気管内の流れを一次元流れとして扱うことは不可能であると思われる。

そこで本研究では、(1)圧力波の伝播を考慮しない脈動シミュレーションを用いる方法 (2)圧力波の伝播を考慮に

入れて非定常流れを解く方法、の二つについて研究をすすめる。

## 7.1 圧力波の伝播を無視する方法

一周期の間に圧力波が排気管内を往復しうる回数が十分大きいときは、圧力波の伝播を無視して圧力変動を計算する。いわゆる Filling & Emptying Method によるシミュレーションが、実用上十分間に合う。

そこで我々は、排気管を何枚かのしほり板で仕切り、このしほり板で圧力波の伝播を遮断することにより、各しほり板で仕切られた空間を容積とみなして圧力変動をシミュレートする方法について研究する。この方法を用いるのは、圧力変動を計算する微分方程式が簡単であることによるが、実際に用いられるためには次のようなことをはっきりさせる必要がある。

- (1) 各仕切りを容積とみなすためには、 $(d/D)\ell$  がある許容値以下である必要がある。 $(d/D)_{\max}$ ,  $\ell_{\max}$  を定める要因とこれらの要因が与えられたとき、 $(d/D)_{\max}$ ,  $\ell_{\max}$  を定める手法を確立させる。
- (2) しほり板はガス流れの抵抗となるが、これがエンジン性能にどの程度の影響を与えるか。

## 7.2 非定常流れを解く方法

静止排気管内の流れは一次元としては扱かい得ないので、排気管内の非定常流れを解く場合は、この点に工夫を要する。現段階では次のようなステップで作業をすすめる予定である。

- (1) 厚さが非常にうすく、平面図形が図 1.14 のような排気管を考えると、このような排気管では流れは二次元流れになる。そこでまず、二次元の非定常流れを解析する手法を研究し、計算時間、手法、解析精度等が実用的に妥当なものが得られるかどうか明らかにする。
- (2) 計算時間、解析精度等が実用的に十分であれば、二次元流れを modify して、三次元流れである排気管の流れを扱う手法について研究する。
- (3) 二次元非定常流れの解析が、実用上複雑すぎるとか、計算所要時間が長すぎる等の問題があるときは、例えば一次元解析と多次元解析を組み合わせて用いる等、実用的なシミュレーションを研究する。

## 8. 二サイクル機関ガス流れの研究の進め方

5～6章において、ガス流れの研究の必要性についてかなり詳細な説明をした。このような背景に基づいて、ガス流れの研究は次のような方針で進めることにしている。

- (1) 特にガス流れと排気温度計の指度の関連をつかむことに重点を置く。
- (2) さらに、掃排気ポートの流量係数、排気ポートから排気管本管までのつなぎ管内の速度分布等、排気脈動シミュレーションの参考資料とすべき、実験データを集めるほか、寸法の異なる実験装置で得られるデータ相互間の相關性および静的ガス流れ実験とピストンを駆動させるいわゆる動的ガス流れ実験で得られるデータの比較検討をもできるかぎり行なう。

## 8.1 ガス流れと排気温度の指度の関連

本件に関連して予定されている作業を列挙すると次の通りである。

- (1) 極細線熱電対等によって、変動温度をできるだけ正確に計測することを試みる。
- (2) 現在大形船用エンジンで用いられている排気温度計を調査し、主として KSZ 機関用のものを参考にして、本研究の調査の対象とすべき標準型を定める。

- (3) この標準型の温度について、温度計自身の伝熱特性すなわちガス流速、ガス温度等によって時定数等がどのような影響を受けるかを調べる。
- (4) 温度計の取付方法について標準的な方法を定め、温度計をとりつけることにより、伝熱特性がどのように変化するかを調べる。
- (5) このようにして得られた資料をもとにして、任意のガス流れの中におかれた温度計が示すべき指数と推定するためのモデル式について検討し、模型実験によってこれを検証する。
- (6) さらに、シリンダ出口つなぎ管内のフローパターン、パルスによるフローパターンの変化、掃気ポートから排気ポートへの短絡流れ、ポートのつかりによるフローパターンの変化等について調査し、これらが排気温度の示す数値にどのように影響するかについて、実験的、理論的な検討を加える。
- (7) このような模型研究と、実機計測をもとにして、実機で計測される排気温度の物理的な解釈を試みる。

## 8.2 静模型・動模型による実験データの比較等

本件に関する作業は、8.1でのべた作業を行なうときに、必然的に実施されることになるが、8.1でのべた実験研究を行なうときに、以下にのべる項目を考慮に入れながら作業をすすめることにする。

- (1) パルスによるフローパターンの変化を調査するときは、掃気ポートのつまりの原因と考えられるような変化が生じないか注目する。
- (2) できるだけ実機に近い装置で実験を行なおうとすれば、装置は大きい方がよいと思われるが、設置場所、費用の点から装置は実機より相当小型にならざるを得ない。静的模型は若干大きめに、動的模型はこれを縮少した形になるので、両方で得られる静的な実験データをもとにして、大きさの異なる装置で得られるガス流れのデータ相互間の関連がつかめるか検討する。
- (3) さらに、動的模型を静止したときに得られる静的流れ実験、動的流れ実験の結果から、動、静で得られるデータの相互関連を検討する。

## 9. 四サイクル機関排気脈動研究の進め方

本研究の必要性についてはすでに述べた通りであり、それ以上特に付け加えることはない。主な作業内容を列挙すると次の通りである。

- (1) 現在までに行なわれた研究結果すなわち、数式モデル、数値解法、計算フロー、境界条件、ステートメントリスト等を再検討する。
- (2) 模型実験装置に若干の改造を加え、分岐合流部の扱かい方を検討する。
- (3) 船研の1シリンダ、四サイクルエンジンを対象にした性能シミュレーションプログラムを作る。
- (4) 性能シミュレーションと、排気管内脈動シミュレーションを結合させるときの問題点を検討し解決する。例えば、排気管とエンジンの結合部、すなわち境界条件の扱かい方について検討し、この部分の扱かい方の妥当性を1シリンダ 四サイクルエンジンによる実験で検証する。
- (5) SR130 で開発された性能シミュレーションと排気管内のシミュレーションを結合し、川崎重工のテストエンジン R6V 22/30 ATL (750 rpm × 750 ps) によりシミュレーションの検証を行なう。

## 10. むすび

以上、緒論においては、本研究が計画された背景において述べて来たが、最後に二サイクル機関の排気脈

動シミュレーションとガス流れの研究について若干補足しておきたい。

すでに述べたように、排気脈動シミュレーションならびにガス流れの研究はともに非常にむずかしい問題であり、本研究が行なわれる昭和50～53年度の間で、これらの問題が満足な形で解決されることは考えられない。

それにもかかわらず本研究について強い要望があるのは、この種の問題を解決することから得られる経済的な効果もさることながら、排気脈動については理論面が弱いために現在とられている対策が果たして最善なものであるかどうか明らかでないこと、さらに排気温度についてはその物理的な解釈がむずかしいために、排気温度を捕えることが技術的に正しいことかどうか疑問なしとしないところにある。

本研究がある程度の成果を得た時に期待される効果を列挙すると次の通りである。

- (1) 脈動シミュレーションがある程度可能になれば、脈動問題が生じたとき、見通しのよい試験運転が可能になり試験運転時間が短縮され、経費が節減されるばかりでなく、生産工程を狂わすことが少なくなる。また、環境問題の面からエンジンの陸上運転時間が制約されているが、試験運転が短縮されることとはこの点でも好都合である。
- (2) 下部ポンプの減少その他によって効率が改善されれば、燃費が節約できる。また、下部ポンプの減少は、吸入弁と吐出弁の製作費と保守費の低減ならびに騒音の低下につながる。
- (3) 排気温度の物理的な意味が明らかになれば、排気温度のばらつきに対して正しく対応できる。すなわち、排気温度は現在よりもさらに均一になるような努力が必要になるかも知れず、逆に現在よりもばらつきの許容範囲が広がるかも知れない。

最後に、特にガス流れの研究について補足しておこう。本研究は、(1)ガス流れと排気温度 (2)相似法則に関する検討に大別され、本計画では前者に重点が置かれることはすでに触れた通りである。

ガス流れに関する相似法則は、設計部門等で手軽な実験研究を行なう場合に、実験結果と実機の対応を考える際の手がかりになるものであり、設計部門からは多年にわたり要望の強い研究分野である。しかし、この分野は本研究の中心課題である排気脈動と排気温度に直接的な関係がないので、中心になっている研究課題が進行する中で必然的に得られるデータを、このような観点から見直す程度にとどめておく。

## 第2編 二サイクル機関の排気脈動シミュレーション

### 1. 排気管の各仕切間を容器とする脈動シミュレーションおよびこの方法の適用限界の推定方法

排気管モデルとして一次元モデルを設定し、これについて実験および理論解析を行なった。

#### 1.1 一次元実験装置

実験装置の概略を図2.1.1に示す。圧縮機からの空気は圧力調整弁で2atgに設定された後、浮遊式流量計で流量を測定し、サージタンクに入る。このタンクはロータリバルブで誘起される圧力変動を少なくし、圧力を一定値に保つために設けた。ロータリバルブは可変速モーターで駆動され、管内に脈動をおこす。圧力は直ゲージ式圧力変換器（Max. 2Kg/cm<sup>2</sup>）で測定し、測定位置は図2.1.1に○印で示す。図2.1.1の左上には絞り板の形状を示す。実験条件は表2.1.1に示す通りである。

ロータリバルブの開口面積の変化は図2.1.2に示す。

表2.1.1 実験条件

排気管長さ	10 m
排気管内径	1 in
タンク圧力	2 atg
タンク温度	18.5 °C
出口ノズル径	8 φ
絞り板の穴径	8 φ ~ 16 φ
回転数	0 ~ 114 rpm
気温	17.5 °C

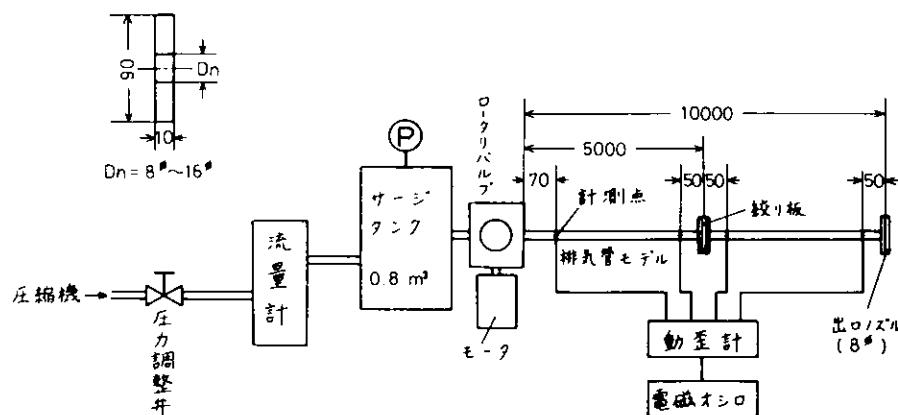


図2.1.1

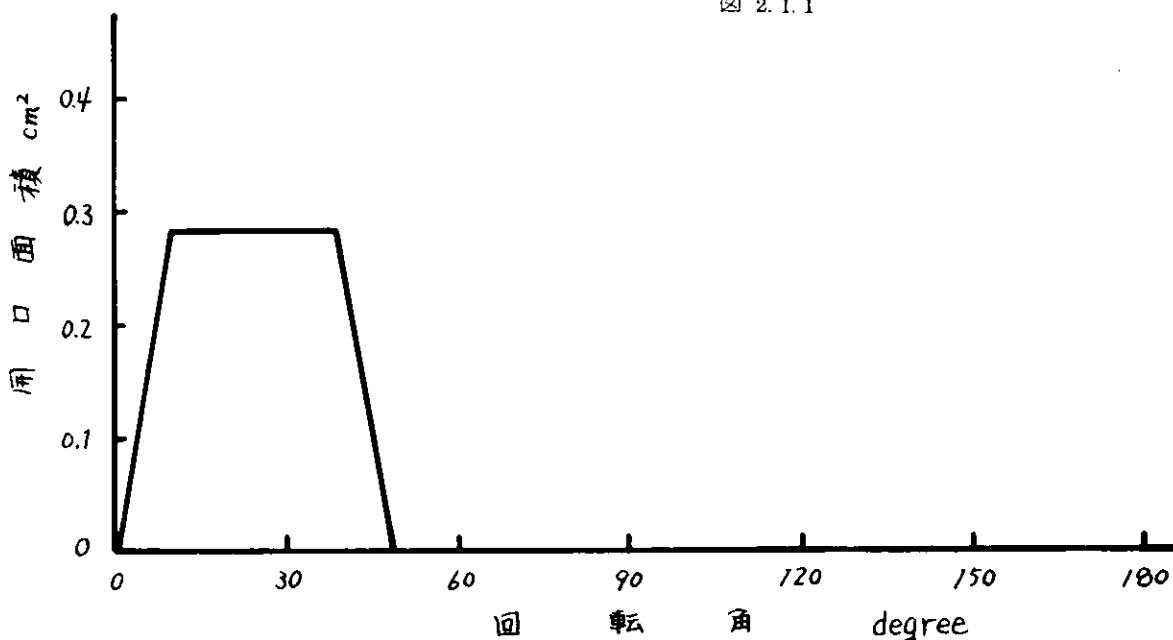


図2.1.2

## 1.2 理論

### 1.2.1 仕切間を容器とみなす取扱い（簡便法）

基礎式は

$$\text{状態方程式} \quad PV = GRT \quad (1.1)$$

$$\text{連続の式} \quad \frac{dG}{dt} = \frac{dG_{in}}{dt} - \frac{dG_{out}}{dt} \quad (1.2)$$

$$\text{エネルギー式} \quad dQ = dU \quad (1.3)$$

$$\text{熱の出入の式} \quad dQ = C_p T dG \quad (1.4)$$

$$\text{内部エネルギーの式} \quad dU = d(GC_v T) \quad (1.5)$$

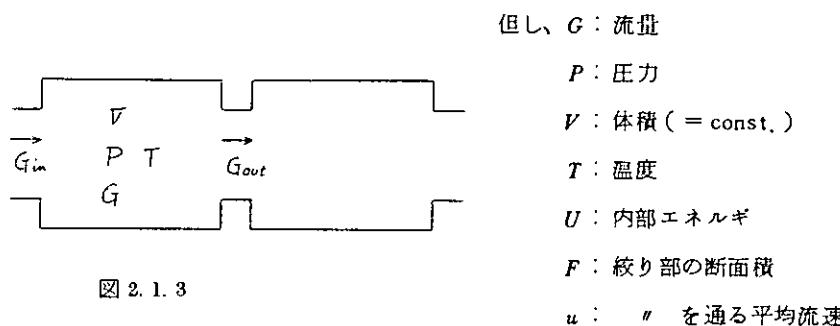
$$\text{質量変化は } dG = r F u dt \text{ となる。} \quad (1.6)$$

$$PV = GRT \text{ から } P dV + V dP = R(T dG + G dT)$$

$$\therefore \frac{dP}{dt} = \frac{RT}{V} \frac{dG}{dt} + \frac{RG}{V} \frac{dT}{dt} \quad (1.7)$$

ここで(1.1)～(1.6)式を用いて、 $\frac{dG}{dt}, \frac{dT}{dt}$ を求め、それらを(1.7)式に代入すると、圧力変化が求まる。

図 2.1.3 IC 解析モデルを示す。



### 1.2.2 一次元非定常圧縮性流体の特性曲線法による取扱い

#### (1) 基礎式

次の様な仮定を設ける。

- 流れは断熱状態である。
- 従って管摩擦は考慮しない。

以上のことから考慮すると、基礎式は

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

$$\text{運動方程式} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (1.9)$$

$$\text{音速の式} \quad C^2 = \kappa \frac{P}{\rho} \quad (1.10)$$

$$\text{断熱変化の式} \quad P \cdot \rho^{-\kappa} = \text{const.} \quad (1.11)$$

となる。

(1.8), (1.9)式に(1.10), (1.11)式を代入して、 $P$ と $\rho$ を $C$ で表わす。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\kappa-1} \left( \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} \right) + C \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{\kappa-1} C \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (1.12)$$

(1.13)

但し  $u$  : 流速

$C$  : 音速

$P$  : 圧力

$\rho$  : 密度

$\kappa$  : 断熱指数

$x$  : 排気管長さ

$t$  : 時間

## (2) 特性曲線法による解析

上記の基礎式をもとにして、特性曲線法により数値計算に必要な連立方程式を求める。この連立方程式を差分近似し、実際に数値計算ができるよう式に書き直す。又、境界部は特殊な取り扱いをするため、その取り扱い方に注意を要する。

以上の詳細は付録Aに示す。

### 1.2.3 境界条件

#### (1) モデル I

入口部、出口部、絞り部のモデルとして図2.1.4のような形について考える。外部へ仕事をせず、熱の出入もない水平流れとすると、 $P_1 > P_2$  のとき、等エントロビ流れの式

$$u_0 = \mu \sqrt{\frac{2 g \kappa R T_1}{\kappa - 1} \left\{ 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right\} + u_1^2} \quad (1.14)$$

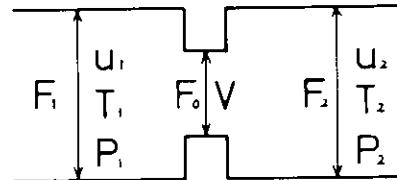


図 2.1.4

となる。但し、 $\mu$  : 流量係数

連続の式

$$\rho_1 u_1 F_1 = \rho_0 u_0 F_0 = \rho_2 u_2 F_2$$

等エントロビの式

$$\rho_0 / \rho_1 = (P_2 / P_1)^{1/\kappa}$$

を開いて、 $u_0$  を書き直すと

$$u_0 = \mu \sqrt{\frac{2 g \kappa R T_1}{\kappa - 1} \cdot \frac{1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{1 - \mu^2 \left( \frac{F_0}{F_1} \right)^2 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{2}{\kappa}}}} \quad (1.15)$$

これより、 $u_1$ 、 $u_2$  を求める。

又、 $P_2 < P_c$  のとき、流速  $u_0$  は臨界速度  $u_c$  になる。

$$u_c = \mu \sqrt{\frac{2 g \kappa R T_1}{\kappa + 1} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} u_1^2} \quad (1.16)$$

但し、臨海圧力  $P_c$  は

$$P_c = P_1 \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \left\{ 1 + \frac{(\kappa - 1) u_1^2}{2 g \kappa R T_1} \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (1.17)$$

入口部では、各式において、 $u_1 = 0$ 、 $F_1 \rightarrow \infty$ 、出口部では $F_2 \rightarrow \infty$ と考える。

## (2) モデルⅡ

各境界におけるエネルギー、運動量の保存を考慮する。すべて、 $P_1 > P_2$  の場合を考える。

絞り部-臨界に達していないとき

このとき、

$$P_2 > P_1 \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

連続の式  $\rho_1 u_1 F_1 = \rho_0 u_0 F_0 = \rho_2 u_2 F_2$

エネルギー式  $\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{1}{2} u_0^2 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2$

等エントロピ式  $\frac{P_1}{\rho_1^\kappa} = \frac{P_0}{\rho_0^\kappa}$

運動量保存  $P_2 = P_0 + \rho_2 u_2 (u_0 - u_2)$

以上の式を、未知数が、 $u_1$ 、 $u_0$ 、 $u_2$ 、 $P_0$ 、 $\rho_0$ 、 $\rho_2$  とする連立方程式と考えて解く。

絞り部-臨界に達したとき

このとき、

$$P_2 \lesssim P_1 \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

連続の式  $\rho_1 u_1 F_1 = \rho_0 u_0 F_0 = \rho_2 u_2 F_2$

エネルギー式  $\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{1}{2} u_0^2 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2$

等エントロピ式  $\frac{P_1}{\rho_1^\kappa} = \frac{P_0}{\rho_0^\kappa}$

音速流  $u_0 = \sqrt{\frac{\kappa P_0}{\rho_0}}$

流入部

絞り部の式で  $u_1 = 0$ 、 $F_1 \rightarrow \infty$  とおけば得られる。未知数は  $u_0$ 、 $\rho_0$ 、 $P_0$ 、 $\rho_2$ 、 $u_2$

流出部-臨界に達していないとき

連続の式  $\rho_1 u_1 F_1 = \rho_0 u_0 F_0$

エネルギー式  $\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{1}{2} u_0^2$

等エントロピ式  $\frac{P_1}{\rho_1^\kappa} = \frac{P_0}{\rho_0^\kappa}$

圧力の伝播  $P_0 = P_2$

未知数は  $u_1, u_0, P_0, \rho_0$

流出部 - 脇界に達したとき

連続の式  $\rho_1 u_1 F_1 = \rho_0 u_0 F_0$

$$\text{エネルギー式} \quad \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{1}{2} u_0^2$$

$$\text{等エントロピ式} \quad \frac{P_1}{\rho_1^\kappa} = \frac{P_0}{\rho_0^\kappa}$$

$$\text{音速流} \quad u_0 = \sqrt{\frac{\kappa P_0}{\rho_0}}$$

各境界における断面積  $F_1, F_0, F_2$  は、流量係数を考慮したもの用いる。連立方程式は Newton 法によって数値的に解く。

### 1.3 簡便法の適用限界推定法

脈動シミュレーションに前述の簡便法を適用するため、管内に絞り板を挿入し、その位置や穴径をかえることによって、その適用限界を推定する。

#### 1.3.1 実験値と理論値の比較

図 2.1.5 に特性曲線法によって計算した、管内の波の伝播の様子を示す。

また、図 2.1.1 のような実験装置を用いて行なった実験結果と、特性曲線法および簡便法で求めた計算結果の比較を行なった図を図 2.1.6 ~ 2.1.9 に示す。各図はロータリバルブの回転数、絞り板の枚数およびその穴径等をかえている。計測場所はロータリバルブ出口より 70 cm の所である。図より理論値（破線）は実験値（実線）と比較的良く一致していることがわかる。中間に絞り板を入れた影響も良く表わせている。簡便法による結果（一点鎖線）は絞り板が無い場合には特性曲線法による結果と良い一致を示さないが、絞り板を入れた場合には良く似てくる。

このように管内に絞り板を挿入することにより、管内に生じる反射波の影響を小さくできる。そこで、この特性曲線法で求めた値と簡便法で求めた値とが近い程管内に現われる反射波の影響は小さいと考えられる。そこで反射波の影響を表わす値として次の値を定義し、以下ではこの値をもとに議論する。すなわち、特性曲線法で求めた圧力を  $P_e(x, t)$ 、簡便法で求めた圧力を  $P_s(x, t)$  とすると、

$$P_{es}(x) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (P_e(x, t) - P_s(x, t))^2 dt} \quad (1.18)$$

$$\overline{P_{es}} = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L (P_{es}(x))^2 dx} \quad (1.19)$$

但し、 $T$  はロータリバルブの 1 周期の時間

$L$  は排気管モデルの長さ

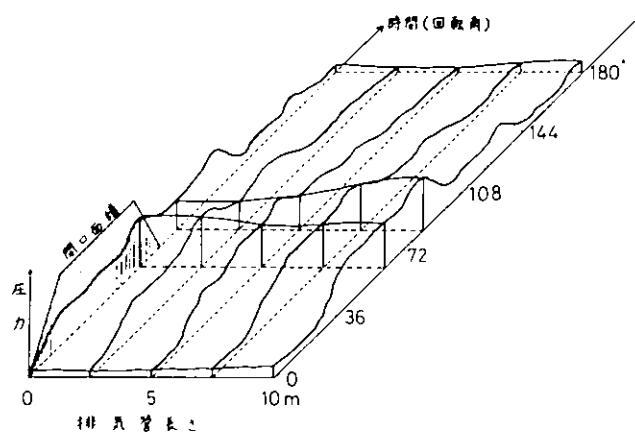


図 2.1.5

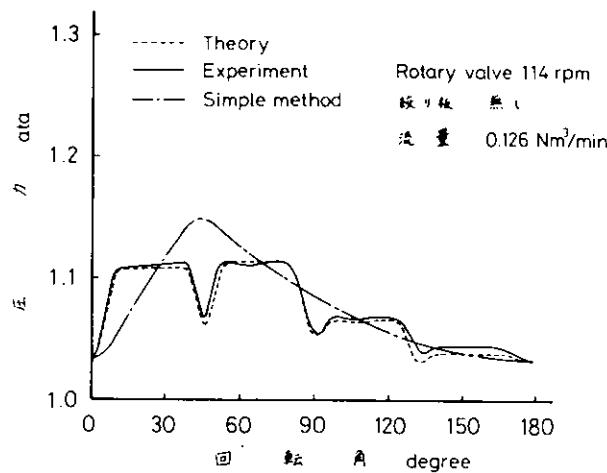


図 2.1.6

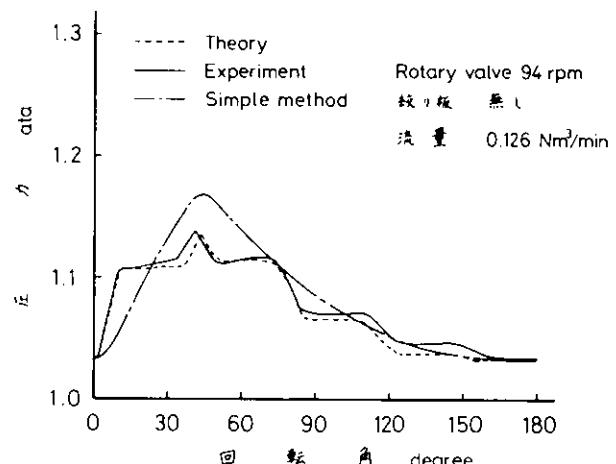


図 2.1.7

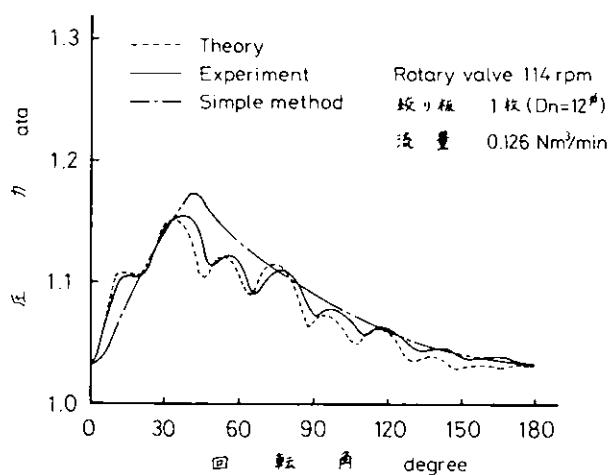


図 2.1.8

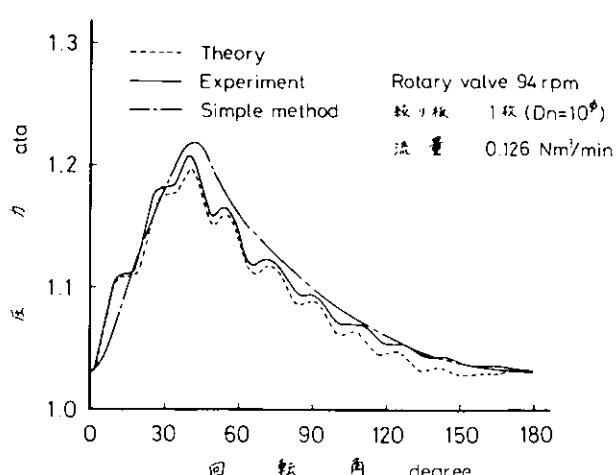


図 2.1.9

### 1.3.2 絞り板の穴径および枚数の影響

ここでは管内に各種の絞り板を入れた場合に、 $\bar{P}_{es}(x)$ 、 $\bar{P}_{es}$  はどのように変化するか、またその枚数がかわればどの様になるかについて調べた。

図 2.1.10、2.1.11 はタンク圧力を 2 atm とし、管内に絞り板を 1 枚入れた場合と 2 枚入れた場合について、 $\bar{P}_{es}$  と（絞り板の穴の面積）／（管の断面積）の関係を示した図である。図 2.1.12 はタンク圧力を 0.5 atm とし絞り板を 1 枚入れた場合と同じ関係を示している。タンク圧力が 2 atm の場合には穴径が 12φ 付近で  $\bar{P}_{es}$  の値が最小になり、それより穴径が小さくなると  $\bar{P}_{es}$  の値は大きくなる。0.5 atm の場合にも同様のことと言える。絞り板の穴径を非常に小さくした場合について、簡便法と特性曲線法で圧力を求めた結果を図 2.1.13 に示す。この図より、簡便法による圧力の計算結果（太い破線）が特性曲線法による結果（実線）より全体的に大きくなっているため、 $\bar{P}_{es}$  の値が大きくなったと考えられる。

この原因として考えられるのは、絞り板の穴径が非常に小さいため、その部分を通った空気は急に圧力が下がりエントロビが増加することによる。

すなわち、最初に仮定した、管内は至るところで断熱変化をするというモデルが適用できなくなる。そこで、エネルギー式を考慮した新しいモデルを作りこれに特性曲線法を用いて解析した。

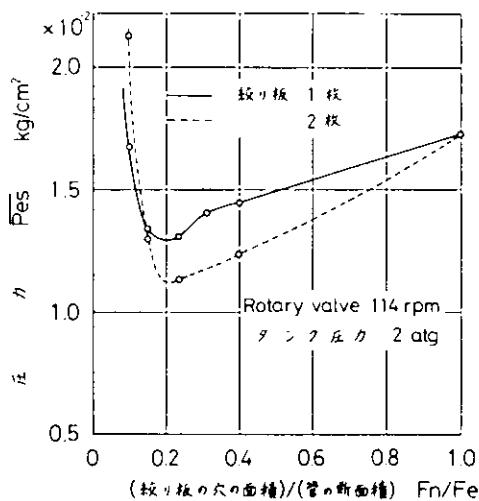


図 2.1.10

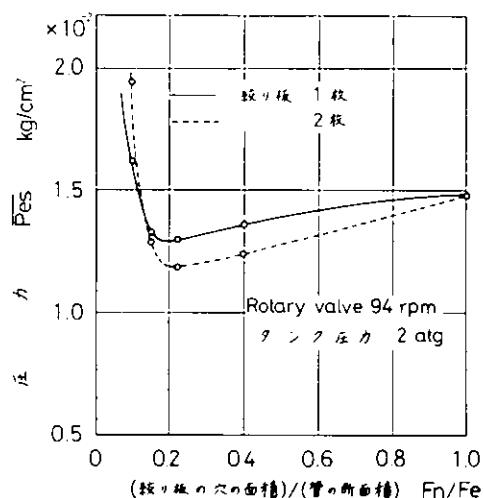


図 2.1.11

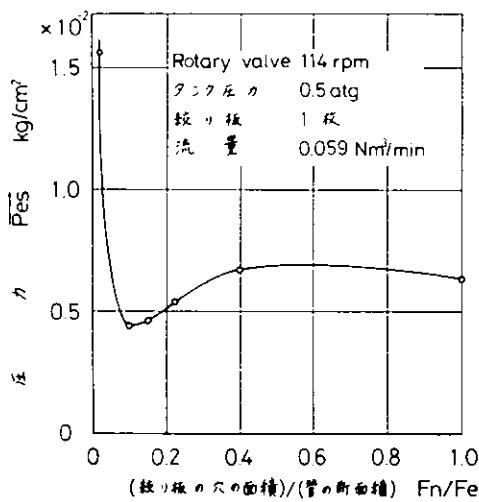


図 2.1.12

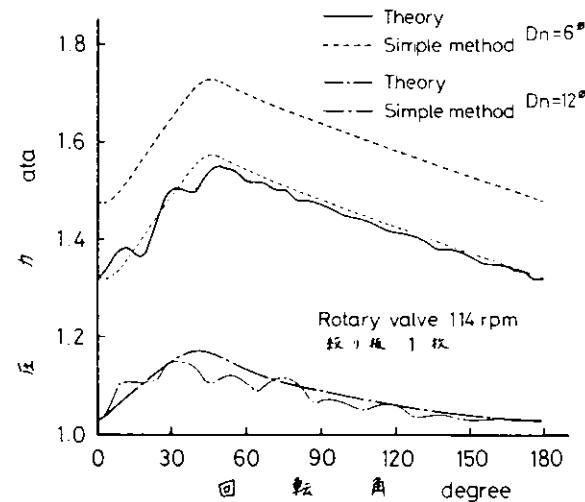


図 2.1.13

### 1.3.3 エネルギ式も考慮した解析

#### (1) 基礎式

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.20)$$

$$\text{運動方程式} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + w = 0 \quad (1.21)$$

$$\text{エネルギー式} \quad \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} - f = 0 \quad (1.22)$$

$$\text{状態方程式} \quad \frac{P}{P_1} = \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\kappa} \cdot C \frac{S - S_1}{C_v} \quad (1.23)$$

$$\text{但し、管摩擦} \quad w = \frac{\xi u^2}{2D} - \frac{u}{|u|} \quad (1.24)$$

$$\text{放熱} \quad f = \frac{(\kappa-1)C_v\rho}{P} (-u \cdot w + q) \quad (1.25)$$

(1.23)式より、

$$dS = C_v \left( -\frac{\kappa d\rho}{\rho} + \frac{dP}{P} \right) \quad (1.26)$$

(1.26)式を(1.22)式に代入すると、

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\kappa P}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - f = 0 \quad (1.27)$$

管摩擦、放熱等を無視し、流れは等エントロビ流れとする。 $(w = f = 0)$

但し、(1.22)式又は(1.27)式の $f = 0$ 即ち $\frac{dS}{dt} = 0$  ということは、流体素子に沿って時間的にエントロビ変化が無いことを意味するのであり、管内に流入する流体が全て同じエントロビを持っているのではない。

#### (2) 特性曲線法

(1.20), (1.21), (1.27)式を用いて解く。

今一般に $\varphi(x, t) = \text{const}$ の面を境に不連続がありうるとすると、

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & 0 \\ \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\kappa P}{\rho} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.28)$$

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\kappa P}{\rho} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right) = 0 \quad (1.29)$$

$$\text{従って, } \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \pm \sqrt{\frac{\kappa P}{\rho}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1.31)$$

$\varphi(x, t) = \text{const.}$  は曲線の方程式である。これを書きかえると、この曲線上では、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0$$

即ち、

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \quad (1.32)$$

(1.30)式を(1.32)式に代入すると、

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (1.33)$$

(1.31)式を(1.32)式に代入すると

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{\frac{\kappa P}{\rho}} \quad (1.34)$$

$$C = \sqrt{\frac{\kappa P}{\rho}} \text{ より、} \quad (\text{但し、 } C \text{；音速})$$

$$\frac{dx}{dt} = u \pm C \quad (1.35)$$

$dx = u dt$  IC沿って(1.27)式より

$$dP - C^2 d\rho = 0 \quad (1.36)$$

$dx = (u + C) dt$  IC沿っては

$$dP + \rho C du = 0 \quad (1.37)$$

$dx = (u - C) dt$  IC沿っては

$$dP - \rho C du = 0 \quad (1.38)$$

新しい変数 $\psi$ ,  $\sigma$ を導入する。

$$\sigma = P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \quad (1.39)$$

$$\psi = \frac{2}{\kappa-1} - \frac{C}{\sigma} \quad (1.40)$$

但し、 $\psi$ ；エントロビのみの関数((1.23)式より)

(エントロビの増加関数)

(1.36)式の代りに、(この式は $dS=0$ の意味)

$$\alpha \psi = 0 \quad (1.41)$$

(1.37), (1.38)式の代りに

$$du + \psi d\sigma = 0 \quad (1.42)$$

$$du - \psi d\sigma = 0 \quad (1.43)$$

を用いる。従って、独立な従属変数は( $u$ ,  $\sigma$ ,  $\psi$ )を用いる。 $C$ ,  $P$ は(1.42), (1.43)式により決める。これらの式を用いた数値計算は付録Bに示す。

このようにして求めた圧力変化を図2.1.14に示す。排気管の長さを1m, 3m, 10mとかえ、入口および出口の境界条件と同じにして計算を行なった。実線はエネルギー式を考慮した特性曲線法による結果であり、破線は

簡便法による結果である。図の右上には、それぞれの場合の  $\bar{P}_{es}$  の値を示してある。図より、排気管の長さが短い程 2 つのグラフの差が小さくなる。即ち、 $\bar{P}_{es}$  の値が小さくなることがわかる。従って、十分に短い排気管では反射波の影響を無視した容器としての取り扱い、即ち簡便法の適用が可能になる。

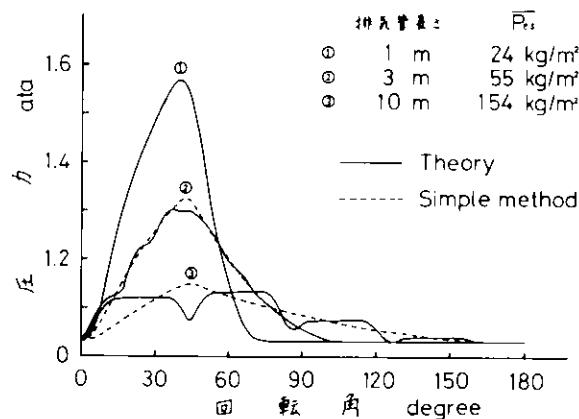


図 2.1.14

## 2. 二次元流れの解析

排気管内の流れを平面的な二次元流れとみなし、排気管モデルとして二次元モデルを設定する。このような二次元解析を行なう手法としては、差分法、有限要素法、二次元特性曲線法などがあるが、ここでは有限要素法と二次元特性曲線法を用いた解析を行なう。

### 2.1 有限要素法による二次元流れの解析

#### 2.1.1 Implicit Method

##### (1) 基 础 式

圧縮性流体の二次元非定常流れについて考える。但し、流れは断熱状態であるとする。基礎方程式は連続の式、運動方程式、状態方程式であり、それぞれ次式で与えられる。

$$\text{連続の式} \quad \rho_t + (u \cdot \rho)_x + (v \cdot \rho)_y = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{運動方程式} \quad u_t + u_x + v_y + \frac{1}{\rho} P_x = 0 \quad (2.2)$$

$$v_t + u_x + v_y + \frac{1}{\rho} P_y = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{状態方程式} \quad P \cdot \rho^{-\kappa} = \text{const.} \quad (2.4)$$

但し、 $u$ 、 $v$  はそれぞれ  $x$ 、 $y$  方向の流速、 $P$  は圧力、 $\rho$  は密度、 $\kappa$  は比熱比である。

$$\text{音速の式} \quad C^2 = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_S \propto \kappa \cdot \rho^{\kappa-1} \quad (2.5)$$

を用いて、(2.1)～(2.4)式を書きかえ、総和規約を用いると次の二式が得られる。

$$u_i, t + u_{i,j} u_j + \frac{\kappa-1}{2} C \cdot C_{,i} = 0 \quad (2.6)$$

$$C, t + u_j C_{,j} + \frac{\kappa-1}{2} C \cdot u_{i,i} = 0 \quad (2.7)$$

ここで添字  $i$ 、 $j$  はそれぞれ  $x$ 、 $y$  を表わす。

(2) 有限要素法

(2.6), (2.7)式を有限要素法を用いて解析するために、以下のような重み付き残差法を用いて変分方程式を導く。そのために、重み関数  $u_i^*$ ,  $C^*$  を考える。この関数は、流速や圧力が与えられる境界では 0 であるが、その他のところで任意の値をとりうる関数である。(2.6)式に  $u_i^*$  をかけ、ある領域  $V$  について積分し加え合わせ、(2.7)式に  $C^*$  をかけ、ある領域  $V$  について積分すると次のようになる。

$$\int_V (u_i^* u_{i,t}) dV + \int_V (u_i^* u_{i,j} u_{j,t}) dV + \frac{2}{\kappa-1} \int_V (u_i^* C C_{,i}) dV = 0 \quad (2.8)$$

$$\int_V (C^* C_{,t}) dV + \int_V (C^* u_j C_{,j}) dV + \frac{\kappa-1}{2} \int_V (C^* C u_{i,i}) dV = 0 \quad (2.9)$$

次に形状関数  $\phi_\alpha(x, y)$ ,  $\psi_\lambda(x, y)$  を用いて、 $u_i$ ,  $C$  を内挿補間する。

$$u_i = \phi_\alpha \cdot u_{\alpha i} \quad (2.10)$$

$$C = \psi_\lambda \cdot C_\lambda \quad (2.11)$$

一方、重み関数  $u_i^*$ ,  $C^*$  についても同様に、

$$u_i^* = \phi_\alpha \cdot u_{\alpha i}^* \quad (2.12)$$

$$C^* = \psi_\lambda \cdot C_\lambda^* \quad (2.13)$$

とする。但し、 $\alpha$ ,  $\lambda$  は要素の節点番号である。

これらを (2.8), (2.9) 式に代入し、 $u_{\alpha i}^*$  と  $C_\lambda^*$  が任意であることを用いると、次の二式が求まる。

$$A_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\beta i}}{\partial t} + B_{\alpha\beta\tau j} u_{\beta i} u_{\tau j} + C_{\alpha\lambda\mu i} C_\lambda C_\mu = 0 \quad (2.14)$$

$$D_{\lambda\mu} \frac{\partial C_\mu}{\partial t} + E_{\lambda\alpha\mu j} u_{\alpha j} C_\mu + F_{\lambda\mu\alpha j} C_\mu u_{\alpha j} = 0 \quad (2.15)$$

$$\text{但し、 } A_{\alpha\beta} = \int_V \phi_\alpha \phi_\beta dV, \quad D_{\lambda\mu} = \int_V \psi_\lambda \psi_\mu dV$$

$$B_{\alpha\beta\tau j} = \int_V \phi_\alpha \phi_{\beta,j} \phi_{\tau,i} dV, \quad E_{\lambda\alpha\mu j} = \int_V \psi_\lambda \phi_\alpha \psi_{\mu,j} dV$$

$$C_{\alpha\lambda\mu i} = \frac{2}{\kappa-1} \int_V \phi_\alpha \psi_\lambda \phi_{\mu,i} dV, \quad F_{\lambda\mu\alpha j} = \frac{\kappa-1}{2} \int_V \psi_\lambda \psi_\mu \phi_{\alpha,j} dV$$

(2.14), (2.15) 式を流れの場にあるすべての有限要素についてたて、全節点における流速と音速（圧力）を未知数とする非線形連立方程式が求まる。この方程式をある境界条件のもとに Newton-Raphson 法を用いて解く。その詳細は付録 C に示す。

(3) 境界条件

簡単のため、4 行 4 列について記述する。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

例えば、 $u_2 = \bar{u}_2$  となるような解を考える。

(2.16)式は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & - & a_{12} & u_2 \\ g_2 & - & a_{22} & u_2 \\ g_3 & - & a_{32} & u_2 \\ g_4 & - & a_{42} & u_2 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

(2.16)式は(2.17)式と同置である。そこで  $u_2 = \bar{u}_2$  とおくと、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \bar{u}_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & - & a_{12} & \bar{u}_2 \\ g_2 & - & a_{22} & \bar{u}_2 \\ g_3 & - & a_{32} & \bar{u}_2 \\ g_4 & - & a_{42} & \bar{u}_2 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$u_2 = \bar{u}_2$  とおけるためには、(2.18)式の2行目の方程式は、1, 3, 4行を満たす  $u_1, u_3, u_4$  を用いると自動的に成立っていなければならない。

(数学的には、(2.16)式の係数行列の行列式が0の時、1つの条件を与えることができる。)

よって(2.18)式は、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2^* \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & - & a_{12} & \bar{u}_2 \\ g_2 & - & a_{22} & \bar{u}_2 \\ g_3 & - & a_{32} & \bar{u}_2 \\ g_4 & - & a_{42} & \bar{u}_2 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

但し、 $u_2^* = g_2 - a_{22} \bar{u}_2, u_2 = \bar{u}_2$  (2.20)

(2.19)式は4個の連立方程式であるが、実質は3個の連立方程式を解けばよい。

次に傾斜した境界の境界条件の入れ方を示す。

図2.2.1のような場合を考える。領域内から外へ向う法線ベクトルを  $\vec{n}$  とすると、法線方向の流速  $\hat{u}_n$  は

$$\begin{aligned} \hat{u}_n &= \vec{n} \cdot \vec{v} \\ &= u \cos \theta + v \sin \theta \end{aligned}$$

但し、一般的には  $\hat{u}_n$  はある値が与えられる。

そこで、今簡単のため4行4列の連立方程式について考える。すなわち、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

を  $\hat{u}_n = u_2 \cos \theta + u_3 \sin \theta$  という条件で解くとする。

(2.21)式は次のように書く。

$$A \cdot \vec{u} = \vec{g} \quad (2.22)$$

回転の演算子  $R(\theta)$  を定義する。

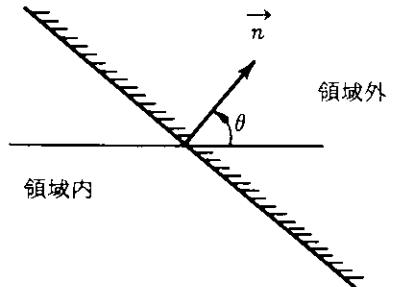


図2.2.1

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

$$R^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

(2.23), (2.24)式を用いて(2.25)式を書きかえると、

$$R(\theta) \cdot A \cdot R^{-1}(\theta) \cdot R(\theta) \cdot \vec{u} = R(\theta) \cdot \vec{g} \quad (2.25)$$

ここで

$$\begin{cases} R(\theta) \cdot A \cdot R^{-1}(\theta) = A'(\theta) \\ R(\theta) \cdot \vec{u} = \vec{u}' \\ R(\theta) \cdot \vec{g} = \vec{g}' \end{cases} \quad (2.26)$$

とおく。

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \cos \theta + u_3 \sin \theta \\ -u_2 \sin \theta + u_3 \cos \theta \\ u_4 \end{pmatrix} \quad \vec{g}' = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \cos \theta + g_3 \sin \theta \\ -g_2 \sin \theta + g_3 \cos \theta \\ g_4 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$\hat{u}_n = u_2 \cos \theta + u_3 \sin \theta \quad (2.28)$$

$$u_t = -u_2 \sin \theta + u_3 \cos \theta \quad (2.29)$$

ここで、 $u_t$ は境界に沿って流れる流速である。

#### (4) 粘性が入った場合について

数値計算の安定性を良くするために、運動方程式に粘性項を導入する。

(2.2), (2.3)式は次のようになる。

$$u_t + u \cdot u_x + v \cdot u_y + \frac{1}{\rho} P_x - \frac{\mu}{\rho} (u_y + v_x) = 0 \quad (2.30)$$

$$v_t + u \cdot v_x + v \cdot v_y + \frac{1}{\rho} P_y - \frac{\mu}{\rho} (u_y + v_x) = 0 \quad (2.31)$$

これらの式に(2.4), (2.5)式を用いて書きかえると、(2.6)式に相当する式として、次式がえられる。

$$u_{i,t} + u_{i,j} \cdot u_j + \frac{2}{k-1} C \cdot C_{i,j} - 2\nu d_{ij,j} = 0 \quad (2.32)$$

$$\text{但し } \nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad d_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

(2.32)式に重み関数  $u_i^*$ ,  $C^*$  をかけて積分する。

$$\int_V u_i^* (u_{i,t} + u_{i,j} \cdot u_j + \frac{2}{k-1} C \cdot C_{i,j} - 2\nu d_{ij,j}) dV = 0 \quad (2.33)$$

この式に(2.10)～(2.18)式であらわされる形状関数を代入し、 $u_{\alpha i}^*$ と $C_{\lambda}^*$ で変分すると、(2.14)式のかわりに次式が求まる。

$$A_{\alpha \beta} \frac{\partial u_{\beta i}}{\partial t} + B_{\alpha \beta r j} u_{\beta i} u_{r j} + C_{\alpha \lambda \mu i} C_{\lambda} C_{\mu} + G_{\alpha \beta} u_{\beta i} + H_{\alpha \beta i j} u_{\beta j} \\ + G'_{\alpha \beta} u_{\beta i} + H'_{\alpha \beta i j} u_{\beta j} = 0 \quad (2.34)$$

但し、 $G_{\alpha \beta} = \nu \int_V \phi_{\alpha, j} \phi_{\beta, j} dV$ 、 $G'_{\alpha \beta} = -\nu \int_S \phi_{\alpha} \phi_{\beta, j} n_j dS$   
 $H_{\alpha \beta i j} = \nu \int_V \phi_{\alpha, j} \phi_{\beta, i} dV$ 、 $H'_{\alpha \beta i j} = -\nu \int_S \phi_{\alpha} \phi_{\beta, i} u_j dS$

#### (5) 数値計算例

形状関数  $\phi_{\alpha}$ ,  $\psi_{\lambda}$  として三節点一次三角形要素を用いる。

図2.2.2は幅10cm, 長さ2mの細長い流路に急に10m/secの流速の空気が流れ込んだ時の流路内の速度分布の時間的な変化を計算したものである。初期条件は流路内の至るところで $u = v = 0$ ,  $P = P_0$ （大気圧）とした。又、境界条件としては、入口の流速10m/sec、出口の圧力は大気圧とし、壁に垂直方向の流速は0、壁に沿っては任意とした。

図より、約5.7m sec後で出口まで圧力が伝わっていることがわかる。

次に図2.2.3のような急拡大流路について考える。このような流路に急に10m/secの流速の空気が流れ込んだ時の流路内の速度分布の時間変化を計算した。境界条件、初期条件は図2.2.2の場合と同じである。動粘性係数 $\nu = 0.001 \text{ m}^2/\text{sec}$ ,  $\Delta t = 0.1 \text{ m sec}$ とした。図2.2.4に1.0m sec後の状態を示す。図2.2.5に3.8m sec後の状態を示す。メッシュが少し荒いため、計算誤差として実際より少し前方まで流れが有る。図2.2.6は5.7m sec後の状態を示す。ほぼ出口付近まで圧力が伝わっていることがわかる。

図2.2.7は計算が定常状態になったと見なせる時の流路内の速度分布を示す。急拡大の部分に渦が生じている。流路の中の入口付近、中央部、出口付近について、それぞれの代表点として $\alpha 10$ ,  $\alpha 33$ ,  $\alpha 90$ の3点を選びそれらの点について $x$ 方向の流速の時間的な変化を示した図を図2.2.8に示す。縦軸に $x$ 方向の流速 $u \text{ m/sec}$ をとり、横軸に時間 $t \text{ sec}$ をとる。この時は $\Delta t = 1.1 \text{ m sec}$ とした。0.25秒後に流れは定常状態になったとみなせる。

図2.2.9, 2.2.10は同様の計算を行ない、ほぼ定常状態になったと見なせる時の流路内の速度分布を示す。

図2.2.9の場合は粘性を考慮しない時の結果である。打切り誤差により渦が生じている。図2.2.10は動粘性係数 $\nu = 0.1 \text{ m}^2/\text{sec}$ とした時の結果である。

#### (6) 結論

Implicit method を用いた有限要素法による二次元解析は多くのCPU timeを必要とする。従って、このような方法を用いて解析を行なうのは実用上問題があると思われる。そこで計算時間を短縮するために、Two Step Lax-Wendroffの差分式を用い、Implicit method で行なったような連立方程式を解かない方法を用いる。次にこの方法について説明する。

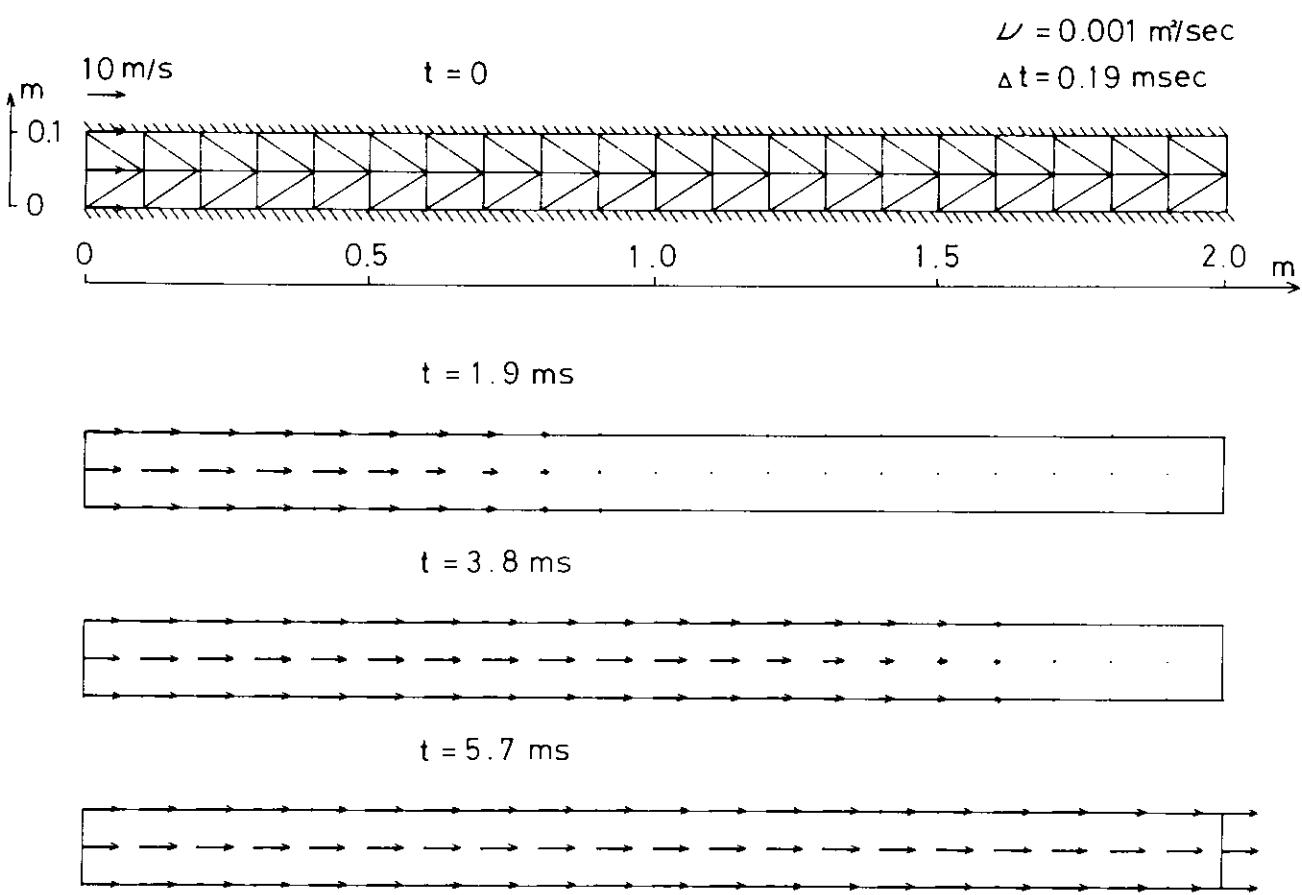


図 2.2.2

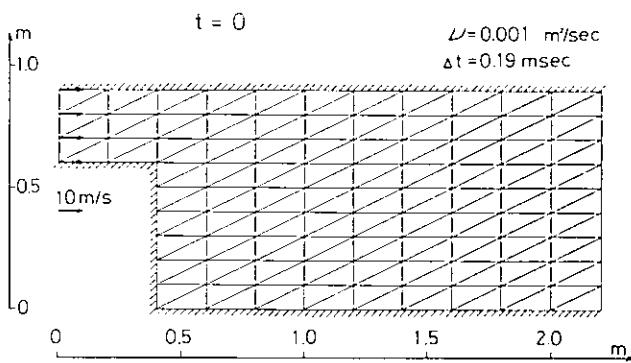


図 2.2.3

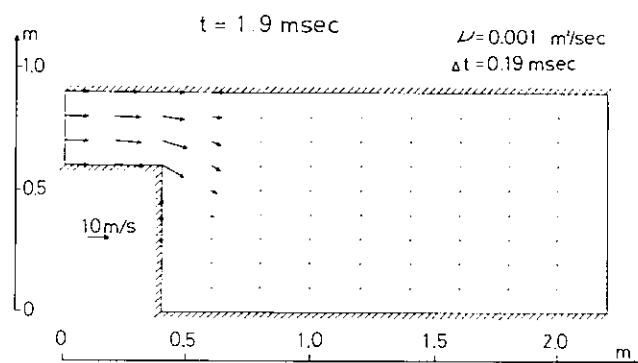


図 2.2.4

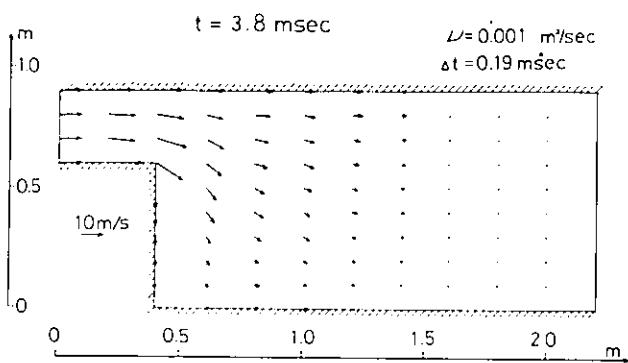


図 2.2.5

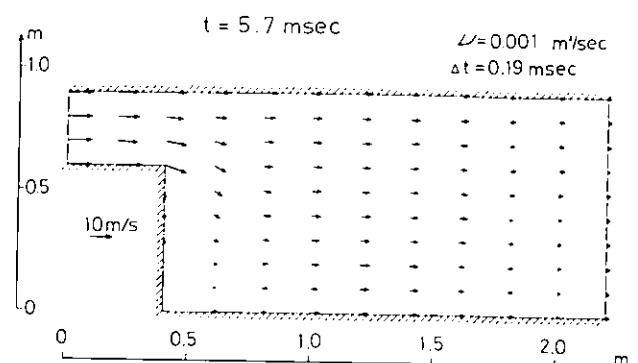


図 2.2.6

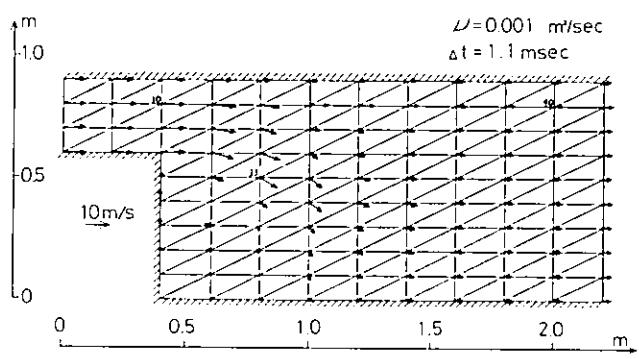


図 2.2.7

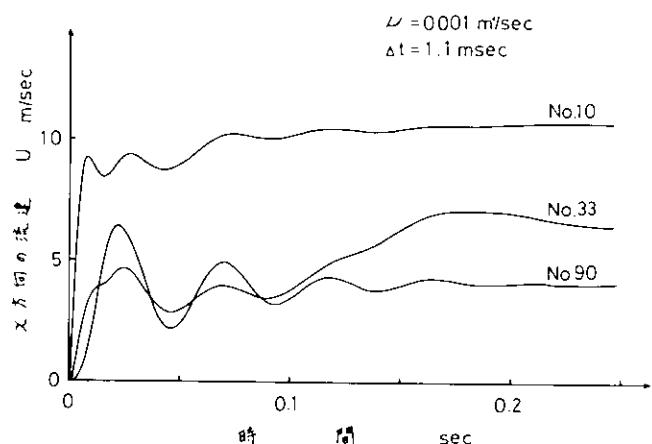


図 2.2.8

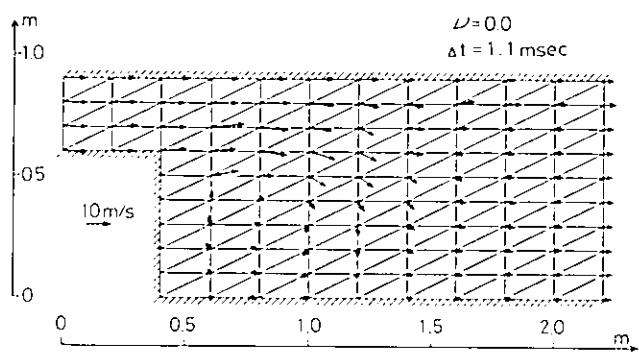


図 2.2.9

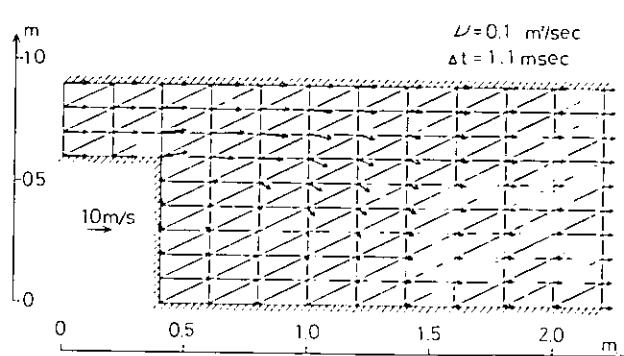


図 2.2.10

### 2.1.2 Two Step Lax-Wendroff Method

#### (1) Two Step Lax-Wendroff Method

今、一次近似で $\dot{w}$ という値を表わす。

$$w^{(n+1)} = w^{(n)} + \Delta t \cdot \dot{w}^{(n)} \quad (2.35)$$

但し、 $w^{(n)}$ は時刻 $n$ の時の値であり、 $w^{(n+1)}$ はその時刻より $\Delta t$ だけ進んだ時の値である。

$\dot{w}^{(n)}$ は時間の1階微分を表わす。

二次近似は次のようになる。

$$w^{(n+1)} = w^{(n)} + \Delta t \dot{w}^{(n)} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{w}^{(n)} \quad (2.36)$$

そこでこの(2.36)式を次のような2回に分ける。

$$\text{1 Step} \quad w^{(n+\frac{1}{2})} = w^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} \dot{w}^{(n)} \quad (2.37)$$

$$\text{2 Step} \quad w^{(n+1)} = w^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} w^{(n+\frac{1}{2})} \quad (2.38)$$

この(2.38)式は(2.36)式と同じであり、このように一次近似を2段階で行なえば、結果として二次近似を行なったことになる。

この方法を用いて有限要素法解析を行なう。

基礎式は Implicit Methodと同じ式を用いる。すなわち、(2.6), (2.7)式である。これを次のように書き換える。

$$u_{i,t} = -(u_{i,j} u_j + \frac{2}{\kappa-1} C \cdot C_{,i}) \quad (2.39)$$

$$C_{,t} = -(u_j C_{,j} + \frac{\kappa-1}{2} C \cdot u_{i,i}) \quad (2.40)$$

(2.39), (2.40)の左辺を差分に直し、書き換える。

$$\frac{u_i^{(n+\frac{1}{2})} - u_i^{(n)}}{\frac{\Delta t}{2}} = -(u_{i,j} u_j + \frac{2}{\kappa-1} C \cdot C_{,i}) \quad (2.41)$$

$$\frac{C^{(n+\frac{1}{2})} - C^{(n)}}{\frac{\Delta t}{2}} = -(u_j C_{,j} + \frac{\kappa-1}{2} C \cdot u_{i,i}) \quad (2.42)$$

ここで添字 $i, j$ はそれぞれ $x, y$ を表わし、 $n$ は時刻 $n$ の時の値、 $n + \frac{1}{2}$ は $n$ より $\frac{\Delta t}{2}$ だけ時間がたった時の値を示す。

そこで、(2.39), (2.40)式に Two Step Lax-Wendroff Method を適用し、(2.41), (2.42)式のような差分で書き換える。

1 Step

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{(n+\frac{1}{2})} = u_i^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} (u_{i,j}^{(n)} u_j^{(n)} + \frac{2}{\kappa-1} C^{(n)} \cdot C_{,i}^{(n)}) \\ C^{(n+\frac{1}{2})} = C^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} (u_j^{(n)} C_{,j}^{(n)} + \frac{\kappa-1}{2} C^{(n)} \cdot u_{i,i}^{(n)}) \end{array} \right. \quad (2.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C^{(n+\frac{1}{2})} = C^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} (u_j^{(n)} C_{,j}^{(n)} + \frac{\kappa-1}{2} C^{(n)} \cdot u_{i,i}^{(n)}) \end{array} \right. \quad (2.44)$$

## 2 Step

$$\begin{cases} u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} (u_{i,j}^{(n+\frac{1}{2})} u_j^{(n+\frac{1}{2})} + \frac{2}{\kappa-1} C^{(n+\frac{1}{2})} C_i^{(n+\frac{1}{2})}) & (2.45) \\ C^{(n+1)} = C^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} (u_j^{(n+\frac{1}{2})} C_{i,j}^{(n+\frac{1}{2})} + \frac{\kappa-1}{2} C^{(n+\frac{1}{2})} u_{i,i}^{(n+\frac{1}{2})}) & (2.46) \end{cases}$$

この(2.43)～(2.46)式に重み付き残差法を用いて変分方程式を導く。導き方は Implicit Methodと同様である。Implicit Methodの(2.14), (2.15)に相当する式は次式である。

$$\begin{cases} A_{\alpha\beta} u_{\beta i}^{(n+\frac{1}{2})} = A_{\alpha\beta} u_{\beta i}^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} B_{\alpha\beta r j} u_{\beta j}^{(n)} u_{r j}^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} C_{\alpha\lambda\mu i} C_{\lambda}^{(n)} C_{\mu}^{(n)} & (2.47) \\ D_{\lambda\mu} C_{\mu}^{(n+\frac{1}{2})} = D_{\lambda\mu} C_{\mu}^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} E_{\lambda\alpha\mu j} u_{\alpha j}^{(n)} C_{\mu}^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} F_{\lambda\mu\alpha i} C_{\mu}^{(n)} u_{\alpha i}^{(n)} & (2.48) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{\alpha\beta} u_{\beta i}^{(n+1)} = A_{\alpha\beta} u_{\beta i}^{(n)} - \Delta t \cdot B_{\alpha\beta r j} u_{\beta i}^{(n+\frac{1}{2})} u_{r j}^{(n+\frac{1}{2})} - \Delta t \cdot C_{\alpha\lambda\mu i} C_{\lambda}^{(n+\frac{1}{2})} C_{\mu}^{(n+\frac{1}{2})} & (2.49) \\ D_{\lambda\mu} C_{\mu}^{(n+1)} = D_{\lambda\mu} C_{\mu}^{(n)} - \Delta t \cdot E_{\lambda\alpha\mu j} u_{\alpha j}^{(n+\frac{1}{2})} C_{\mu}^{(n+\frac{1}{2})} - \Delta t \cdot F_{\lambda\mu\alpha i} C_{\mu}^{(n+\frac{1}{2})} u_{\alpha i}^{(n+\frac{1}{2})} & (2.50) \end{cases}$$

そこで、連立方程式を解かないようにするため(2.49)～(2.50)式を次のように書く。

$$\begin{cases} \frac{A}{3} u_{\alpha i}^{(n+\frac{1}{2})} = A_{\alpha\beta} u_{\beta i}^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} B_{\alpha\beta r j} u_{\beta i}^{(n)} u_{r j}^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} C_{\alpha\lambda\mu i} C_{\lambda}^{(n)} C_{\mu}^{(n)} & (2.51) \\ \frac{A}{3} C_{\lambda}^{(n+\frac{1}{2})} = D_{\lambda\mu} C_{\mu}^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} E_{\lambda\alpha\mu j} u_{\alpha j}^{(n)} C_{\mu}^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} F_{\lambda\mu\alpha i} C_{\mu}^{(n)} u_{\alpha i}^{(n)} & (2.52) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{A}{3} u_{\alpha i}^{(n+1)} = \frac{A}{3} \delta_{\alpha\beta} u_{\beta i}^{(n)} - \Delta t B_{\alpha\beta r j} u_{\beta i}^{(n+\frac{1}{2})} u_{r j}^{(n+\frac{1}{2})} - \Delta t C_{\alpha\lambda\mu i} C_{\lambda}^{(n+\frac{1}{2})} C_{\mu}^{(n+\frac{1}{2})} & (2.53) \\ \frac{A}{3} C_{\lambda}^{(n+1)} = \frac{A}{3} \delta_{\lambda\mu} C_{\mu}^{(n)} - \Delta t \cdot E_{\lambda\alpha\mu j} u_{\alpha j}^{(n+\frac{1}{2})} C_{\mu}^{(n+\frac{1}{2})} - \Delta t F_{\lambda\mu\alpha i} C_{\mu}^{(n+\frac{1}{2})} u_{\alpha i}^{(n+\frac{1}{2})} & (2.54) \end{cases}$$

この(2.51)～(2.54)式を用いて、各要素の流速と音速を求める。

境界における流速や圧力が既知の場合はその値を代入する。

### (2) 数値計算例

図2.2.11のような急拡大流路について計算する。図2.2.3と同じ形状であるが、メッシュの切り方を変えた。すなわち、急拡大の部分のメッシュを細かく切った。境界条件は入口で徐々に流速を増加させ、流速が10m/secになるまで増やす。又、出口の圧力は大気圧、壁に垂直方向の流速は0、壁に沿っては任意とした。初期条件は流路内の至るところで $u = v = 0$ ,  $P = P_0$ （大気圧）とした。

このようにして計算した結果を図2.2.12に示す。この時の $\Delta t = 0.11\text{m sec}$ である。非粘性解析であるにもかかわらず拡大部に渦が生じている。

### (3) 結論

計算時間は短縮できるが、精度が悪くなる。しかし、実用上はかなり期待できると思われる。

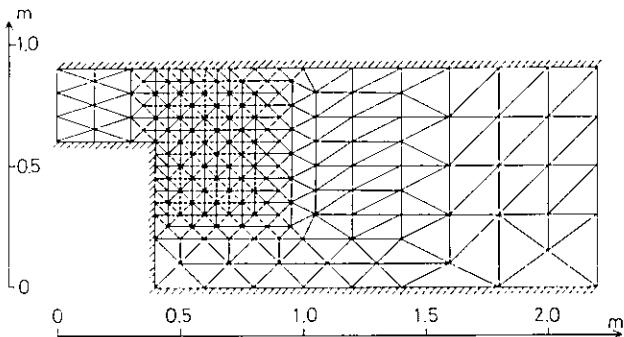


図 2.2.11

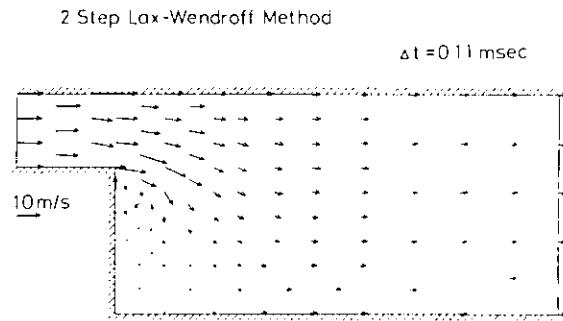


図 2.2.12

## 2.2 特性曲線法による二次元流れの解析

二次元圧縮性非定常流れの方程式が双曲形であることに注目して、一次元流れの特性曲線法を拡張した二次元特性曲線法による解析を試みた。特性曲線法は、解式自身に物理的に明白な意味があるが、表現が少し複雑となり、余り多く応用されてこなかった。詳細は付録Dにまわし、概略だけ記す。

### 2.2.1 二次元非定常圧縮性流体の基礎方程式

解くべき方程式は

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + W_x = 0 \quad (2.55)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + W_y = 0 \quad (2.56)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho g = 0 \quad (2.57)$$

$$\frac{DS}{Dt} - f = 0 \quad (2.58)$$

但し、ラグランジアンの微分

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.59)$$

を用いた。状態方程式

$$\frac{P}{P_1} = \left( \frac{P}{P_1} \right)^{\kappa} \cdot e^{\frac{S-S_1}{C_v}} \quad (2.60)$$

を用いて (2.58) を変形すると

$$\frac{DP}{Dt} - \frac{\kappa P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} - \frac{P}{C_v} f = 0 \quad (2.61)$$

一次元流と同様に、新しい変数

$$a = P(\kappa-1)/2\kappa \quad (2.62)$$

$$\psi = \frac{2}{\kappa-1} - \frac{C}{\sigma} \quad (2.63)$$

$$C = \sqrt{\kappa P / \rho} \quad (2.63)$$

を用いて整理すると

$$\frac{Du}{Dt} + C\psi \frac{\partial \sigma}{\partial x} + W_x = 0 \quad (2.64)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + C\psi \frac{\partial \sigma}{\partial y} + W_y = 0 \quad (2.65)$$

$$\frac{D\sigma}{Dt} + \frac{\kappa-1}{2} \sigma \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\kappa-1}{2} \sigma \left( \frac{f}{C_v \kappa} + g \right) = 0 \quad (2.66)$$

$$\frac{D\psi}{Dt} - \frac{f}{2 C_v \kappa} \psi = 0 \quad (2.67)$$

### 2.2.2 二次元特性曲線法

一次元流と同様に、物理量の不連続は、波動の形態をとるものと、流線に沿って伝播するものがある。静かな水面に生じた外乱は、波動の伝播速度  $C$  で、同心円を描きながら伝播する。又水面が速度  $(u, v)$  で移動していると、この同心円の中心が、速度  $(u, v)$  で移動するに過ぎない。したがって、この様子を縦軸を時間にとって図示すると図 2.2.13 となる。

$t = t_0$  で原点にある流体に外乱を与えると、時刻  $t = t_0 + dt$  では、原点にあった流体は

$$\begin{cases} dx = u dt \\ dy = v dt \end{cases} \quad (2.68)$$

$\psi$  移動し、波動は

$$\begin{cases} dx = (u + C \cos \theta) dt \\ dy = (v + C \sin \theta) dt \end{cases} \quad (2.69)$$

まで伝播する。但し、 $\theta$  は、波動の伝播方向の  $x$  軸となす

角である。(2.69)式によって決定される円錐は、特性

射線錐、その母線は特性射線と呼ばれる。偏微分方程式 (2.64) ~ (2.67) 式を特性射線方向の微分で書きえると、

$$\psi d\sigma + \cos \theta du + \sin \theta dv = -(C s + \ell) dt \quad (2.70)$$

となる。但し、

$$s = \sin^2 \theta \frac{\partial u}{\partial x} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \cos^2 \theta \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.71)$$

$$\ell = w_x \cos \theta + w_y \sin \theta - C \left( \frac{f}{C_v \kappa} + g \right) \quad (2.72)$$

エントロピーのような物理量は、流体粒子と共に伝播する。すなわち、流線の式 (2.68) 式によって

$$d\psi = \frac{f}{2 C_v \kappa} \psi dt \quad (2.73)$$

が成立つ。又流線方向にそって、(2.66) 式から、補助的に

$$\psi d\sigma = \left\{ -C \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + C \left( \frac{f}{C v k} + g \right) \right\} dt \quad (2.74)$$

を得る。 $(2.70)$ 式の右辺の  $s$  及び  $(2.74)$ 式の右辺には各偏微分を含んでおり、各方向の微分式を連立させて積分を進めるとき、積分点でのこれらの偏微分を消去する必要がある。

### 2.2.3 積分法

特性射線錘上の 4 つの特性射線方向  $\theta_1 \sim \theta_4$  と、流線方向について成立つ微分式を、2 次の差分で近似する。面  $t = t_0 - h$  上における各物理量が与えられているとする。 $t = t_0$  における点  $(x_0, y_0)$  を通る 4 つの特性射線及び流線と面  $t = t_0 - h$  と交わる点を  $P_1 \sim P_4$  及び  $P_5$  とする。 $t = t_0$  における点  $(x_0, y_0)$  の物理量は、点  $P_1 \sim P_5$  における物理量を用いて、差分式を連立させて解くことができる。 $t = t_0 - h$  における物理量は、実際に各格子点でのみ与えられているから、点  $P_1 \sim P_5$  での値は、補間法を用いて決定する必要がある。

### 2.2.4 結 果

特性曲線法は解式が explicit であることを反映して、予備的な計算ではあるが、F, E, M に比較して非常に計算速度が速い。未だ十分信頼できる out put を得ておらず精度についての検討はできない。

## 3. 実験装置の設計製作

一次元実験装置に用いた回転弁は等エンタルピ変化をシミュレートするが、これではエンジンの排気行程をシミュレートできない。そこで、二次元実験装置用の回転弁は、エンジンの排気行程をシミュレートできるようにするため、一定容積からの断熱膨張、すなわち等エントロビ変化ができるようにした。

図 2.3.1 に、その組立図を示す。又、図 2.3.2 に回転弁の外筒を、図 2.3.3 にロータを示す。

さらに、中圧空気一次配管用品を購入の上、中圧空気配管工事をを行い、あわせてエアタンク、二次元脈動管支え台等の空気系付属装置を製作した。

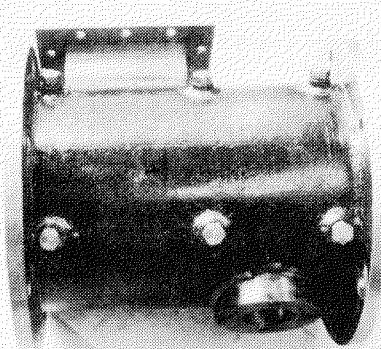


図 2.3.2

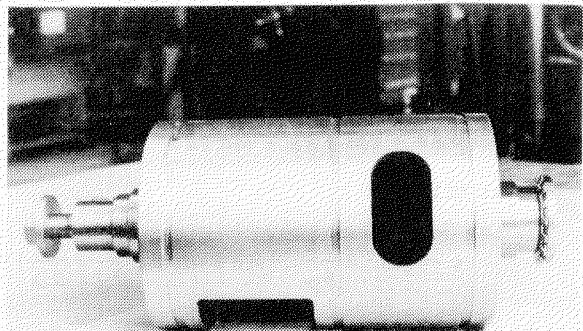


図 2.3.3

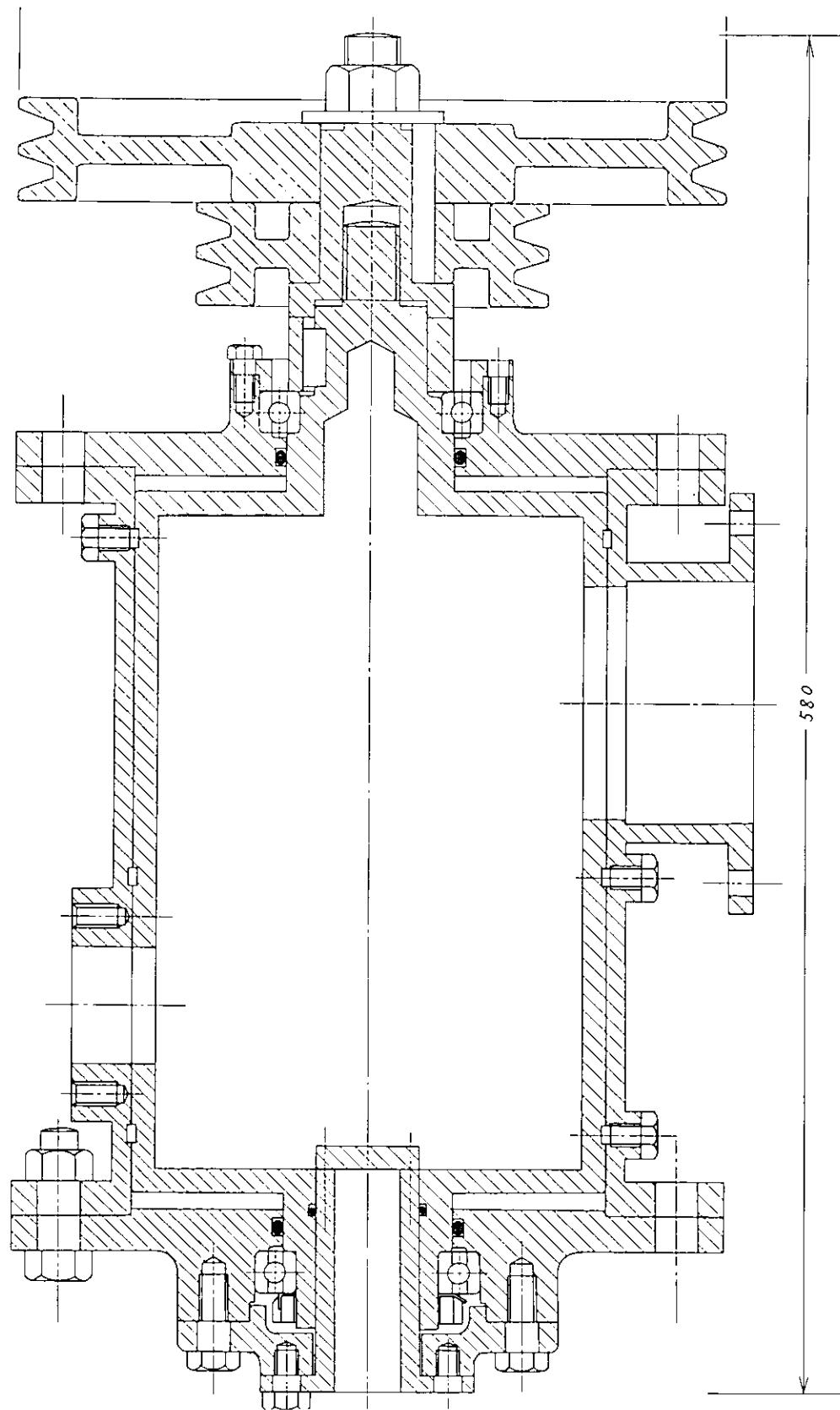


图 2.3.1

## 付 錄 A

### A-I 特性曲線法

(1.5) (1.6)式に特性曲線法を用いる。

(1.5)式に $\xi$ をかけ (1.6)と加える。

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u + C\xi) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{2}{\kappa-1} \xi \left\{ \frac{\partial C}{\partial t} + \left( \frac{\xi u + C}{\xi} \right) \frac{\partial C}{\partial x} \right\} = 0 \quad (A-1)$$

ここで,  $du = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) dt$        $dC = \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) dt$  より  
 $\frac{dx}{dt} = u + C\xi \quad (A-2)$        $\frac{dx}{dt} = \frac{\xi u + C}{\xi} \quad (A-3)$  という関係が成立つよう $\xi$ を決める

こととする。

この時 (A-1) 式は  $du + \frac{2}{\kappa-1} \xi dC = 0 \quad (A-4)$  となる。

$$(A-2), (A-3) \text{式より} \quad u + C\xi = \frac{\xi u + C}{\xi}$$

$$\therefore \xi = \pm 1 \quad (A-5)$$

従って

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{dx}{dt} \right)_1 = u + C \\ \left( \frac{dx}{dt} \right)_2 = u - C \end{array} \right. \quad (A-6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{dx}{dt} \right)_1 = u + C \\ \left( \frac{dx}{dt} \right)_2 = u - C \end{array} \right. \quad (A-7)$$

(A-4)式に(A-5)式を代入すると

$$\left\{ \begin{array}{l} du + \frac{2}{\kappa-1} dC = 0 \\ du - \frac{2}{\kappa-1} dC = 0 \end{array} \right. \quad (A-8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} du + \frac{2}{\kappa-1} dC = 0 \\ du - \frac{2}{\kappa-1} dC = 0 \end{array} \right. \quad (A-9)$$

以上の(A-6)~(A-9)式を解いて 点( $x$   $t$ )における $u$ と $C$ を求める。

### A-II 数値計算

まず管長 $\ell$ を等間隔の長さ $\Delta x$ で整数個に分割する。時間間隔 $\Delta t$ は次の収束条件をみたす様にえらぶ。

$$\Delta x / \Delta t > |u| + C \quad (A-10)$$

計算を始める際の初期条件としては各点の $u$ を0  $C$ を大気状態とした。

(A-6)~(A-9)式を差分近似する。

近似式としては次の二式を用いる。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{線型近似} & \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx f(x_0)(x_1 - x_0) \\ \text{二階近似} & \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{1}{2} \{ f(x_0) + f(x_1) \} (x_1 - x_0) \end{array} \right\} \quad (A-11)$$

図2.A-1に示すように、P点を $t_i + \Delta t$  上の求めるべき位置とし、A、B、Cが $t_i$  上の点とする。

P点を通る2本の特性曲線が $t_i$  上で交わる点をR、Sとする。

(A-6)、(A-7)式より、

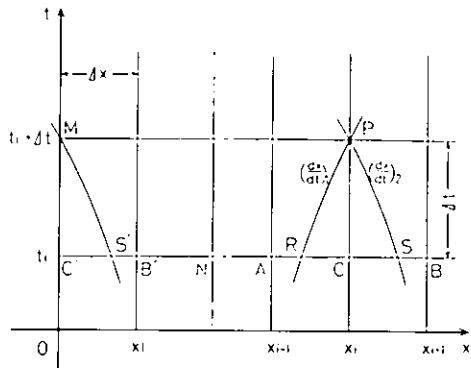
$$t_P - t_R = \left( \frac{dt}{dx} \right)_1 (x_P - x_R) \quad (A-12)$$

$$t_P - t_S = \left( \frac{dt}{dx} \right)_2 (x_P - x_S) \quad (A-13)$$

$x_P = x_C$  とおくと、 $x_R$ 、 $x_S$  が求まる。

$$x_R = x_C - \Delta t \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)_1 \quad (A-14)$$

$$x_S = x_C - \Delta t \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)_2 \quad (A-15)$$



次に線形内挿法を用いて $u_R$ を求める。

図2.A-1

$$\theta = \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{ とおく。}$$

$$u_R = u_C \left\{ 1 - \left( \frac{dx}{dt} \right)_1 \theta \right\} + u_A \cdot \theta \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)_1 \quad (A-16)$$

同様にして、

$$u_S = u_C \left\{ 1 - \left( \frac{dx}{dt} \right)_2 \theta \right\} + u_B \cdot \theta \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)_2 \quad (A-17)$$

$$c_R = c_C \left\{ 1 - \left( \frac{dx}{dt} \right)_1 \theta \right\} + u_A \cdot \theta \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)_1 \quad (A-18)$$

$$c_S = c_C \left\{ 1 - \left( \frac{dx}{dt} \right)_2 \theta \right\} + u_B \cdot \theta \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)_2 \quad (A-19)$$

これらの値を用いて、 $u_P$ 、 $c_P$ の第一近似値は(A-8)、(A-9)式に(A-11)の線型差分式を用いて近似し、それらを連立して解けば求まる。すなわち、

$$\begin{cases} (u_P - u_R) + \frac{2}{\kappa-1} (c_P - c_R) = 0 \\ (u_P - u_S) - \frac{2}{\kappa-1} (c_P - c_S) = 0 \end{cases} \quad (A-20)$$

$$(A-21)$$

従って、

$$u_P = \frac{1}{2} (u_R + u_S) + \frac{1}{\kappa-1} (c_R - c_S) \quad (A-22)$$

$$c_P = \frac{1}{2} (c_R + c_S) + \frac{1}{\kappa-1} (u_R - u_S) \quad (A-23)$$

次にこの $u_P$ 、 $c_P$ の値を用いて、(A-11)式の二階近似式を用いて、( $\kappa+1$ )回のくり返し計算を行なう。

( $\kappa+1$ )回目のくり返しを行なった時の $x_R$ 、 $x_S$ を $x_R^{(\kappa+1)}$ 、 $x_S^{(\kappa+1)}$ と書くと、

$$t_P - t_R = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{dt}{dx} \right)_{1P}^{(\kappa)} + \left( \frac{dt}{dx} \right)_{1R}^{(\kappa)} \right\} (x_P - x_R^{(\kappa+1)}) = \Delta t \quad (A-24)$$

$$t_P - t_S = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{dt}{dx} \right)_{2P}^{(\kappa)} + \left( \frac{dt}{dx} \right)_{2S}^{(\kappa)} \right\} (x_P - x_S^{(\kappa+1)}) = \Delta t \quad (A-25)$$

従って、

$$x_R^{(\kappa+1)} = x_p - \frac{2 \Delta t (u_p + C_p) (u_R + C_R)}{u_p + C_p + u_R + C_R} \quad (A-26)$$

$$x_S^{(\kappa+1)} = x_p - \frac{2 \Delta t (u_p - C_p) (u_S - C_S)}{u_p - C_p + u_S - C_S} \quad (A-27)$$

$u_R^{(\kappa+1)}$ 、 $u_S^{(\kappa+1)}$ 、 $C_R^{(\kappa+1)}$ 、 $C_S^{(\kappa+1)}$  はこれらの値を用い、二次内挿法により求める。すなわち、

$$\begin{aligned} u_R^{(\kappa+1)} &= u_C - \frac{1}{2 \cdot \Delta x} (u_A - u_B) (x_R^{(\kappa+1)} - x_C) \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot (\Delta x)^2} (u_A + u_B - 2u_C) (x_R^{(\kappa+1)} - x_C)^2 \end{aligned} \quad (A-28)$$

$$\begin{aligned} u_S^{(\kappa+1)} &= u_C - \frac{1}{2 \cdot \Delta x} (u_A - u_B) (x_S^{(\kappa+1)} - x_C)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot (\Delta x)^2} (u_A + u_B - 2u_C) (x_S^{(\kappa+1)} - x_C)^2 \end{aligned} \quad (A-29)$$

$$\begin{aligned} C_R^{(\kappa+1)} &= C_C - \frac{1}{2 \cdot \Delta x} (C_A - C_B) (x_R^{(\kappa+1)} - x_C) \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot (\Delta x)^2} (C_A + C_B - 2C_C) (x_R^{(\kappa+1)} - x_C)^2 \end{aligned} \quad (A-30)$$

$$\begin{aligned} C_S^{(\kappa+1)} &= C_C - \frac{1}{2 \cdot \Delta x} (C_A - C_B) (x_S^{(\kappa+1)} - x_C) \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot (\Delta x)^2} (C_A + C_B - 2C_C) (x_S^{(\kappa+1)} - x_C)^2 \end{aligned} \quad (A-31)$$

これらの値を用いて、( $\kappa+1$ )回目の $u_p$ 、 $C_p$ は次の連立方程式を解いて求める。

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_p^{(\kappa+1)} - u_R^{(\kappa+1)}) + \frac{2}{\kappa-1} (C_p^{(\kappa+1)} - C_R^{(\kappa+1)}) = 0 \\ (u_p^{(\kappa+1)} - u_S^{(\kappa+1)}) - \frac{2}{\kappa-1} (C_p^{(\kappa+1)} - C_S^{(\kappa+1)}) = 0 \end{array} \right. \quad (A-32)$$

$$(A-33)$$

従って、

$$u_p^{(\kappa+1)} = \frac{1}{2} (u_R^{(\kappa+1)} + u_S^{(\kappa+1)}) + \frac{1}{\kappa-1} (C_R^{(\kappa+1)} - C_S^{(\kappa+1)}) \quad (A-34)$$

$$C_p^{(\kappa+1)} = \frac{1}{2} (C_R^{(\kappa+1)} + C_S^{(\kappa+1)}) + \frac{\kappa-1}{4} (u_R^{(\kappa+1)} - u_S^{(\kappa+1)}) \quad (A-35)$$

## A-1 境界における特性曲線法

境界において使用できる特性曲線は図2.2.1に示すように  $(\frac{dx}{dt})_1$  か  $(\frac{dx}{dt})_2$  のどちらか一方である。

従って、この場合にはUかCのどちらか一方が既知でなければならない。ここではuをまず求め、それを用いてCを求めている。次に一例として入口部の境界の計算について述べる。

図2.A-1において、M点を  $t_i + \Delta t$  上の求めるべき位置とし、C'、B'が  $t_i$  上の点とする。今、M点を通る特性曲線が  $t_i$  上で交わる点をS'とする。

Mは入口であるから、 $x_M = x_{C'} = 0$  とすると、 $x_{S'}$ は、

$$\begin{aligned} x_{S'} &= x_M - \left( \frac{dx}{dt} \right)_2 \cdot \Delta t \\ &= - \left( \frac{dx}{dt} \right)_2 \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (A-36)$$

前述と同様に線型内挿法を用いて  $u_S$ 、 $C_S$  を求める。

$$\begin{aligned} u_S &= u_{C'} + \frac{u_{B'} - u_{C'}}{\Delta x} (x_{S'} - x_{C'}) \\ &= u_{C'} + \frac{u_{B'} - u_{C'}}{\Delta x} \times x_{S'} \end{aligned} \quad (A-37)$$

$$\begin{aligned} C_{S'} &= C_{C'} + \frac{C_{B'} - C_{C'}}{\Delta x} (x_{S'} - x_{C'}) \\ &= C_{C'} + \frac{C_{B'} - C_{C'}}{\Delta x} \times x_{S'} \end{aligned} \quad (A-38)$$

$u_M$  と  $C_M$  は次のような関係がある。

$$(u_M - u_{S'}) - \frac{2}{\kappa-1} (C_M - C_{S'}) = 0 \quad (A-39)$$

従って、

$$C_M = C_{S'} + \frac{\kappa-1}{2} (u_M - u_{S'}) \quad (A-40)$$

次にこの値を用いて 2 次近似を行なう。

( $\kappa+1$ ) 回目のくり返しを行なった時  $x_{S'}$  を  $x_{S'}^{(\kappa+1)}$  と書くと、

$$x_{S'}^{(\kappa+1)} = x_M - \frac{2 \Delta t (u_M - C_M) (u_{S'} - C_{S'})}{u_M - C_M + u_{S'} - C_{S'}} \quad (A-41)$$

$u_{S'}^{(\kappa+1)}$ 、 $C_{S'}^{(\kappa+1)}$  はこれらの値を用い、二次内挿法を用いて求める。

$$u_{S'}^{(\kappa+1)} = u_{B'} - \frac{u_N - u_{C'}}{2 \Delta x} (x_{B'} - x_{S'}^{(\kappa+1)}) + \frac{u_N + u_{C'} - 2u_{B'}}{2 (\Delta x)^2} (x_{B'} - x_{S'}^{(\kappa+1)})^2 \quad (A-42)$$

$$C_{S'}^{(\kappa+1)} = C_{B'} - \frac{C_N - C_{C'}}{2 \Delta x} (x_{B'} - x_{S'}^{(\kappa+1)}) + \frac{C_N + C_{C'} - 2C_{B'}}{2 (\Delta x)^2} (x_{B'} - x_{S'}^{(\kappa+1)})^2 \quad (A-43)$$

$u_M^{(\kappa+1)}$  と  $C_M^{(\kappa+1)}$  は次のような関係がある。すなわち、

$$(u_M^{(\kappa+1)} - u_{S'}^{(\kappa+1)}) - \frac{2}{\kappa-1} (C_M^{(\kappa+1)} - C_{S'}^{(\kappa+1)}) = 0 \quad (A-44)$$

$$\therefore C_M^{(\kappa+1)} = C_{S'}^{(\kappa+1)} + \frac{\kappa-1}{2} (u_M^{(\kappa+1)} - u_{S'}^{(\kappa+1)}) \quad (A-45)$$

## 付 錄 B

### B - I 特性曲線法による数値計算

前述の通り、一次近似および二次近似を行なう。図 2. B - 1 に示すように、P 点を  $t_i + \Delta t$  上の求めるべき位置とし、A、B、C が  $t_i$  上の点とする。P 点を通る 3 本の特性曲線が  $t_i$  上で交わる点を D、R、S とする。

(3-16)、(3-18)式より、

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = u_C + c_C \quad (B-1)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = u_C - c_C \quad (B-2)$$

$$x_R = -\Delta t \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 \quad (B-3)$$

$$x_S = -\Delta t \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 \quad (B-4)$$

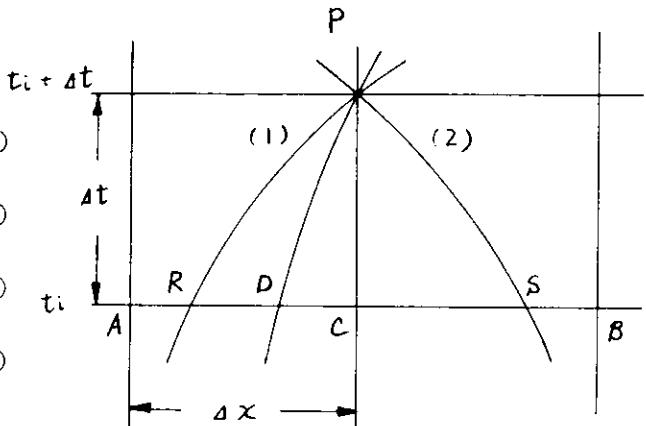


図 2. B - 1

次に線形内挿法を用いて  $u_R$ 、 $u_S$ 、 $\sigma_R$ 、 $\sigma_S$ 、 $\phi_R$ 、 $\phi_S$  を求める。

$$u_R = u_C + \left(\frac{du}{dx}\right)_R \cdot x_R = u_C + \frac{u_C - u_A}{\Delta x} \cdot x_R \quad (B-5)$$

$$u_S = u_C + \left(\frac{du}{dx}\right)_S \cdot x_S = u_C + \frac{u_B - u_C}{\Delta x} \cdot x_S \quad (B-6)$$

$$\sigma_R = \sigma_C + \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_R \cdot x_R = \sigma_C + \frac{\sigma_C - \sigma_A}{\Delta x} \cdot x_R \quad (B-7)$$

$$\sigma_S = \sigma_C + \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_S \cdot x_S = \sigma_C + \frac{\sigma_B - \sigma_C}{\Delta x} \cdot x_S \quad (B-8)$$

$$\phi_R = \phi_C + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_R \cdot x_R = \phi_C + \frac{\phi_C - \phi_A}{\Delta x} \cdot x_R \quad (B-9)$$

$$\phi_S = \phi_C + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_S \cdot x_S = \phi_C + \frac{\phi_B - \phi_C}{\Delta x} \cdot x_S \quad (B-10)$$

この  $\phi_R$ 、 $\sigma_R$ 、 $\phi_S$ 、 $\sigma_S$  を用いて音速を求める。

$$c_R = \frac{\kappa - 1}{2} \phi_R \cdot \sigma_R \quad (B-11)$$

$$c_S = \frac{\kappa - 1}{2} \phi_S \cdot \sigma_S \quad (B-12)$$

従って、

$$u_P = \frac{u_R + u_S}{2} + \frac{\phi_C}{2} (\sigma_R - \sigma_S) \quad (B-13)$$

$$\sigma_P = \frac{\sigma_R + \sigma_S}{2} + \frac{1}{2\phi_C} (u_R - u_S) \quad (B-14)$$

$$x_D = -u_C \cdot \Delta t$$

$$\phi_D = \phi_C + \frac{d\phi}{dx} \cdot x_D = \phi_C + \frac{\phi_B - \phi_A}{2\Delta x} \cdot x_D \quad (B-15)$$

$$C_P = \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \phi_P \cdot \sigma_P \quad (B-16)$$

次にこの  $u_P$ 、 $\sigma_P$ 、 $\phi_P$  の値を用いて、二階近似を行なう。

( $\kappa + 1$ ) 回のくり返しを行なう。

$$\left( \frac{dt}{dx} \right)_{1P} = \frac{1}{u_P + C_P} \quad (B-17)$$

$$\left( \frac{dt}{dx} \right)_{2P} = \frac{1}{u_P - C_P} \quad (B-18)$$

$$\left( \frac{dt}{dx} \right)_{1R} = \frac{1}{u_R + C_R} \quad (B-19)$$

$$\left( \frac{dt}{dx} \right)_{2S} = \frac{1}{u_S - C_S} \quad (B-20)$$

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_1 = \frac{2}{\left( \frac{dt}{dx} \right)_{1P} + \left( \frac{dt}{dx} \right)_{1R}} \quad (B-21)$$

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_2 = \frac{2}{\left( \frac{dt}{dx} \right)_{2P} + \left( \frac{dt}{dx} \right)_{2S}} \quad (B-22)$$

従って、

$$x_R = -4t \left( \frac{dx}{dt} \right)_1 \quad (B-23)$$

$$x_S = -4t \left( \frac{dx}{dt} \right)_2 \quad (B-24)$$

これらの値を用いて  $u_R^{(\kappa+1)}$ 、 $u_S^{(\kappa+1)}$ 、 $\phi_R^{(\kappa+1)}$ 、 $\phi_S^{(\kappa+1)}$ 、 $\sigma_R^{(\kappa+1)}$ 、 $\sigma_S^{(\kappa+1)}$  を二次内挿法を用いて求める。すなわち、

$$u_R = u_C + \frac{du}{dx} \cdot x_R + \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot x_R^2 \quad (B-25)$$

$$u_S = u_C + \frac{du}{dx} \cdot x_S + \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot x_S^2 \quad (B-26)$$

$$\phi_R = \phi_C + \frac{d\phi}{dx} \cdot x_R + \frac{1}{2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} \cdot x_R^2 \quad (B-27)$$

$$\phi_S = \phi_C + \frac{d\phi}{dx} \cdot x_S + \frac{1}{2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} \cdot x_S^2 \quad (B-28)$$

$$\sigma_R = \sigma_C + \frac{d\sigma}{dx} \cdot x_R + \frac{1}{2} \frac{d^2 \sigma}{dx^2} \cdot x_R^2 \quad (B-29)$$

$$\sigma_S = \sigma_C + \frac{d\sigma}{dx} \cdot x_S + \frac{1}{2} \frac{d^2 \sigma}{dx^2} \cdot x_S^2 \quad (B-30)$$

これらの値より ( $\kappa + 1$ ) 回目の  $u_P^{(\kappa+1)}$ 、 $C_P^{(\kappa+1)}$ 、 $\sigma_P^{(\kappa+1)}$ 、 $\phi_P^{(\kappa+1)}$  を求める。

$$u_P^{(\kappa+1)} = \frac{(\phi_R + \phi_P)(\phi_S + \phi_P)}{\phi_S + \phi_R + 2\phi_P} \left\{ \frac{u_R}{\phi_R + \phi_P} + \frac{u_S}{\phi_S + \phi_P} + \frac{\sigma_R - \sigma_S}{2} \right\} \quad (B-31)$$

$$\sigma_P^{(\kappa+1)} = \frac{\frac{\phi_R + \phi_P}{2} \sigma_R + \frac{\phi_S + \phi_P}{2} \sigma_S + (u_R - u_S)}{\frac{\phi_R + \phi_S}{2} + \phi_P} \quad (B-32)$$

$$C_R = \frac{\kappa - 1}{2} \phi_R \cdot \sigma_R \quad (B-33)$$

$$C_S = \frac{\kappa - 1}{2} \phi_S \cdot \sigma_S \quad (B-34)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2u_P \cdot u_D}{u_P + u_D} \quad (B-35)$$

$$x_D = -\left(\frac{dx}{dt}\right) \cdot \Delta t \quad (B-36)$$

$$u_D = u_C + \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot x_D + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) \cdot x_D^2 \quad (B-37)$$

$$\phi_P^{(\kappa+1)} = \phi_C + \left(\frac{d\phi}{dx}\right) \cdot x_D + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \phi}{dx^2}\right) \cdot x_D^2 \quad (B-38)$$

$$C_P^{(\kappa+1)} = \frac{\kappa - 1}{2} \phi_P \cdot \sigma_P \quad (B-39)$$

## B-II 境界における特性曲線法

今、図 2.B-2 に示すように入口部についてのみ考える。出口の場合は  $\alpha = 1$  と取れば良い。入口の時は  $\alpha = -1$  とする。

P を通る 2 本の特性曲線が  $t_i$  軸上で交わる点を D、R とする。

$$\begin{aligned} x_R &= -\Delta t \left(\frac{dx}{dt}\right) \\ &= -\Delta t \cdot (u_A + \alpha C_A) \quad (B-40) \end{aligned}$$

次に  $u_R$ 、 $\sigma_R$ 、 $\phi_R$  を求める。

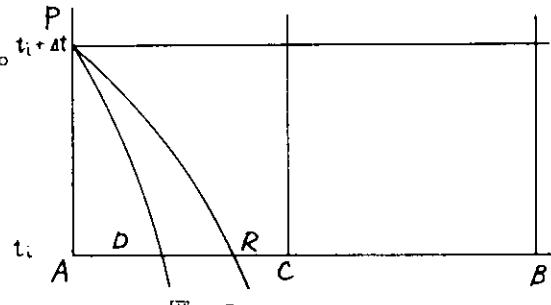


図 2.B-2

$$u_R = u_A + \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot x_R = u_A + x_R \cdot \left(-\alpha \cdot \frac{u_C - u_A}{\Delta x}\right) \quad (B-41)$$

$$\sigma_R = \sigma_A + \left(\frac{d\sigma}{dx}\right) \cdot x_R = \sigma_A + x_R \cdot \left(-\alpha \cdot \frac{\sigma_C - \sigma_A}{\Delta x}\right) \quad (B-42)$$

$$\phi_R = \phi_A + \left(\frac{d\phi}{dx}\right) \cdot x_R = \phi_A + x_R \cdot \left(-\alpha \cdot \frac{\phi_C - \phi_A}{\Delta x}\right) \quad (B-43)$$

$\alpha u_P > 0$  の時、

$$x_D = -u_A \cdot \Delta t$$

$$\therefore \phi_P = \phi_A + \frac{d\phi}{dx} \cdot x_D \quad (B-44)$$

$$u_D = u_A + \frac{du}{dx} \cdot x_D$$

$$\frac{d\phi}{dx} = -\alpha \frac{\phi_B - \phi_A}{2\Delta x}$$

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{\phi_B + \phi_A - 2\phi_C}{(\Delta x)^2}$$

$$\therefore \sigma_P = \sigma_R - \frac{\alpha}{\phi_P} (u_P - u_R) \quad (B-45)$$

$$\therefore C_P = \frac{\kappa - 1}{2} \phi_P \sigma_P \quad (B-46)$$

$$C_R = \frac{\kappa - 1}{2} \phi_R \sigma_R$$

次に二次近似を用いて、 $u_P$ 、 $C_P$ 、 $\sigma_P$ 、 $\phi_P$ を求める。

$$\frac{du}{dx} = -\alpha \frac{u_B - u_A}{2 \Delta x}, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{u_B + u_A - 2u_C}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = -\alpha \frac{\sigma_B - \sigma_A}{2 \Delta x}, \quad \frac{d^2 \sigma}{dx^2} = \frac{\sigma_B + \sigma_A - 2\sigma_C}{(\Delta x)^2}$$

又、

$$\left( \frac{dt}{dx} \right)_P = \frac{1}{u_P + \alpha C_P}, \quad \left( \frac{dt}{dx} \right)_R = \frac{1}{u_R + \alpha C_R}$$

$$\therefore \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{2}{\left( \frac{dt}{dx} \right)_P + \left( \frac{dt}{dx} \right)_R} \quad (B-47)$$

従って、

$$x_R = -\left( \frac{dx}{dt} \right) \cdot \Delta t \quad (B-48)$$

$$\delta x = x_R + \alpha \Delta x \quad \text{とおく。}$$

$$\delta x^2 = (\delta x)^2$$

$$u_R = u_C + \frac{du}{dx} \cdot \delta x + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} (\delta x)^2$$

$$\sigma_R = \sigma_C + \frac{d\sigma}{dx} \cdot \delta x + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \sigma}{dx^2} (\delta x)^2$$

$$\phi_R = \phi_C + \frac{d\phi}{dx} \cdot \delta x + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \phi}{dx^2} (\delta x)^2$$

$$\therefore C_R = \frac{\kappa - 1}{2} \phi_R \cdot \sigma_R$$

$$\therefore \sigma_P = \sigma_R - \frac{2\alpha}{\phi_P + \phi_R} (u_P - u_R) \quad (B-49)$$

$\alpha u_P > 0$  の時、

$$\left( \frac{dt}{dx} \right)_P = \frac{1}{u_P}, \quad \left( \frac{dt}{dx} \right)_D = \frac{1}{u_D}$$

$$\therefore \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{2}{\left( \frac{dt}{dx} \right)_P + \left( \frac{dt}{dx} \right)_D} \quad (B-50)$$

$$\therefore x_D = -\left( \frac{dx}{dt} \right) \cdot \Delta t \quad (B-51)$$

$$\delta x = x_D + \alpha \Delta x \quad \text{とおく。}$$

$$u_D = u_C + \frac{du}{dx} \cdot \delta x + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} (\delta x)^2$$

$$\therefore \phi_P = \phi_C + \frac{d\phi}{dx} \cdot \delta x + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \phi}{dx^2} (\delta x)^2 \quad (B-52)$$

## 付 錄 C

### C-I Newton-Raphson 法

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \\ f_2(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \end{array} \right. \quad (f_i = 0) \quad \text{--- (C-1)}$$

各式の変分をとると、

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \cdot \delta u_j = \delta f_i \quad \text{--- (C-2)}$$

(C-1)式の解の近似値を  $u_1^\circ, u_2^\circ, \dots, u_n^\circ$ 、その時、 $f_i^\circ = f_i(u_1^\circ, \dots, u_n^\circ)$

$$(\frac{\partial f_i}{\partial u_j})_0 = (\frac{\partial f_i}{\partial u_j})_{u_1^\circ, \dots, u_n^\circ} \quad \text{と書くと (C-2) 式は、}$$

$$(\frac{\partial f_i}{\partial u_j})_0 \cdot (u_j - u_j^\circ) = f_i - f_i^\circ \quad \text{--- (C-3)}$$

$f_i = 0$  となるように  $u_j$  を決めるから、

$$(\frac{\partial f_i}{\partial u_j})_0 \cdot (u_j - u_j^\circ) = -f_i^\circ \quad \text{--- (C-4)}$$

これを書き換えると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} (\frac{\partial f_1}{\partial u_1})_0 & (\frac{\partial f_1}{\partial u_2})_0 & \dots & (\frac{\partial f_1}{\partial u_n})_0 \\ (\frac{\partial f_2}{\partial u_1})_0 & (\frac{\partial f_2}{\partial u_2})_0 & \dots & (\frac{\partial f_2}{\partial u_n})_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\frac{\partial f_n}{\partial u_1})_0 & (\frac{\partial f_n}{\partial u_2})_0 & \dots & (\frac{\partial f_n}{\partial u_n})_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - u_1^\circ \\ u_2 - u_2^\circ \\ \vdots \\ u_n - u_n^\circ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1^\circ \\ f_2^\circ \\ \vdots \\ f_n^\circ \end{pmatrix} \quad \text{--- (C-5)}$$

従って、

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^\circ \\ u_2^\circ \\ \vdots \\ u_n^\circ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\frac{\partial f_1}{\partial u_1})_0 & (\frac{\partial f_1}{\partial u_2})_0 & \dots & (\frac{\partial f_1}{\partial u_n})_0 \\ (\frac{\partial f_2}{\partial u_1})_0 & (\frac{\partial f_2}{\partial u_2})_0 & \dots & (\frac{\partial f_2}{\partial u_n})_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\frac{\partial f_n}{\partial u_1})_0 & (\frac{\partial f_n}{\partial u_2})_0 & \dots & (\frac{\partial f_n}{\partial u_n})_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1^\circ \\ f_2^\circ \\ \vdots \\ f_n^\circ \end{pmatrix} \quad \text{--- (C-6)}$$

(2-14)、(2-15)式を(C-6)式を用いて書きかえる。

即ち、

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial u_{\beta i}}{\partial t} + B_{\alpha\beta\gamma i} u_{\beta i} u_{\gamma j} + C_{\alpha\lambda\mu i} C_{\lambda} C_{\mu} = f_{\alpha i} = 0 \\ D_{\lambda\mu} \cdot \frac{\partial C_{\mu}}{\partial t} + E_{\lambda\beta\mu j} u_{\beta j} C_{\mu} + F_{\lambda\mu\beta j} C_{\mu} u_{\beta j} = f_{\lambda} = 0 \end{array} \right. \quad (C-7)$$

時間微分を差分で近似して、

$$(a_i) \quad \frac{1}{\Delta t} A_{\alpha\beta} \delta_{ij} u_{\beta j} + B_{\alpha\beta\gamma i} u_{\beta i} u_{\gamma j} + C_{\alpha\lambda\mu i} C_{\lambda} C_{\mu} - \frac{1}{\Delta t} A_{\alpha\beta} u_{\beta i}^{(n-1)} = f_{\alpha i} \quad (C-8)$$

$$(\lambda) \quad \frac{1}{\Delta t} D_{\lambda\mu} C_{\mu} + E_{\lambda\beta\mu j} u_{\beta j} C_{\mu} + F_{\lambda\mu\beta j} C_{\mu} u_{\beta j} - \frac{1}{\Delta t} D_{\lambda\mu} C_{\mu}^{(n-1)} = f_{\lambda}$$

( $\alpha i$ )行、( $\lambda$ )行を  $u_{\beta j}$ 、 $C_{\mu}$  で偏微分して、

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{\Delta t} A_{\alpha\beta} \delta_{ij} + B_{\alpha\beta\gamma k} u_{\gamma k} \delta_{ij} + B_{\alpha\beta j} u_{\gamma i} & (C_{\alpha\nu\mu i} + C_{\alpha\nu\nu i}) C_{\nu} \\ (\frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial u_{\beta j}}) & (\frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial C_{\mu}}) \\ (E_{\lambda\beta\nu j} + F_{\lambda\nu\beta j}) C_{\nu} & \frac{1}{\Delta t} D_{\lambda\mu} + (E_{\lambda\tau\mu k} + F_{\lambda\mu\tau k}) u_{\tau k} \\ (\frac{\partial f_{\lambda}}{\partial u_{\beta j}}) & (\frac{\partial f_{\lambda}}{\partial C_{\mu}}) \end{array} \right] - (C-9)$$

行列(C-9)を  $(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}})$  と略記すると(C-5)式は、

$$(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}})_0 \begin{pmatrix} u_{\beta j} - W_{\beta j} \\ C_{\mu} - B_{\mu} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{\alpha i}^{(o)} \\ f_{\lambda}^{(o)} \end{pmatrix} \quad (C-10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{\beta j}、B_{\mu} はそれぞれ u_{\beta j}、C_{\mu} の近似値 \\ f^o は(C-8)で、近似値 W_{\beta j}、B_{\mu} を用いた式 \end{array} \right.$$

境界条件については、(2-19)式のように取り扱う。

$u_{\beta j} - W_{\beta j}$ 、 $C_{\mu} - B_{\mu}$  等を未知数と考え、したがって  $u$  又は  $C$  が given のところではこれらが 0 と考える。

以上まとめると次式のようになる。

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{\Delta t} A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta\gamma k} W_{\gamma k} + B_{\alpha\beta\gamma 1} W_{\gamma 1} & B_{\alpha\beta\gamma 1} W_{\gamma 1} & (C_{\alpha\nu\mu 1} + C_{\alpha\nu\nu 1}) B_{\nu} \\ B_{\alpha\beta\gamma 2} W_{\gamma 2} & \frac{1}{\Delta t} A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta\gamma k} W_{\gamma k} + B_{\alpha\beta\gamma 2} W_{\gamma 2} & (C_{\alpha\nu\mu 2} + C_{\alpha\nu\nu 2}) B_{\nu} \\ (E_{\lambda\beta\nu 1} + F_{\lambda\nu\beta 1}) B_{\nu} & (E_{\lambda\beta\nu 2} + F_{\lambda\nu\beta 2}) B_{\nu} & \frac{1}{\Delta t} D_{\lambda\mu} + (E_{\lambda\tau\mu k} + F_{\lambda\mu\tau k}) W_{\tau k} \end{array} \right] \begin{pmatrix} u_{\beta 1} - W_{\beta 1} \\ u_{\beta 2} - W_{\beta 2} \\ C_{\mu} - B_{\mu} \end{pmatrix}$$

$$= - \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{\Delta t} A_{\alpha\beta} (W_{\beta 1} - u_{\beta 1}^{(n-1)}) + B_{\alpha\beta\gamma 1} W_{\beta 1} W_{\gamma j} + C_{\alpha\lambda\mu 1} B_{\lambda} B_{\mu} \\ \frac{1}{\Delta t} A_{\alpha\beta} (W_{\beta 2} - u_{\beta 2}^{(n-1)}) + B_{\alpha\beta\gamma 2} W_{\beta 2} W_{\gamma j} + C_{\alpha\lambda\mu 2} B_{\lambda} B_{\mu} \\ \frac{1}{\Delta t} D_{\lambda\mu} (B_{\mu} - C_{\mu}^{(n-1)}) + (E_{\lambda\beta\mu j} + F_{\lambda\mu\beta j}) W_{\beta j} B_{\mu} \end{array} \right] \quad (C-11)$$

$W_{\beta j}、B_{\mu}$  はそれぞれ  $u_{\beta j}、C_{\mu}$  の近似値

## 付 錄 D

### D-I 二次元非定常圧縮性流体の基礎方程式

各変数間の熱力学的関係式を整理すると、

$$\text{エネルギー式} \quad dQ = dU + Pdv \quad (D-1)$$

$$\text{エントロピ定義} \quad dS = dQ/T \quad (D-2)$$

$$\text{状態方程式} \quad Pv = RT \quad (D-3)$$

$$\text{内部エネルギー} \quad dU = Cv dT \quad (D-4)$$

$$\text{等圧比熱} \quad C_p = Cv + R \quad (D-5)$$

$$\text{比熱比} \quad \kappa = C_p/C_v \quad (D-6)$$

(D-1)～(D-6)式を用いると、エントロピ変化をP、ρの変化によって書き表わすことができる。

(D-1)、(D-2)、(D-3)式は

$$\begin{aligned} dS &= dU/T + Pdv/T \\ &= CvdT/T + Pdv/T \\ &= CvdT/T + Rdv/v \end{aligned}$$

(D-3)式より、

$$dT/T = dv/v + dP/P$$

よって、

$$\begin{aligned} dS &= Cv(dv/v + dP/P) + Rdv/v \\ &= (Cv + R)dv/v + Cv dP/P \end{aligned}$$

又、 $v = \frac{1}{\rho}$  だから、

$$\frac{dv}{v} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

を考慮して、(D-5)、(D-6)式を用いると、

$$\begin{aligned} dS &= Cv(\kappa dv/v + dP/P) \\ \therefore dS &= Cv(-\kappa d\rho/\rho + dP/P) \end{aligned}$$

積分すると、

$$S - S_1 = -Cv \log \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^\kappa + Cv \log \frac{P}{P_1}$$

$$\text{故に、} \quad \frac{P}{P_1} = \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^\kappa \cdot e^{\frac{S-S_1}{Cv}} \quad (D-7)$$

ガス（燃焼ガス、空気）は急激に圧力、速度、温度等は変化しない、と仮定し、したがって非粘性流体として取扱うものとすると、次の4つの基礎方程式によって記述される。

運動量保存則

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + w_x = 0 \quad (D-8)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + w_y = 0 \quad (D-9)$$

質量保存則(連続の式)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho \cdot g = 0 \quad (D-10)$$

エントロピ変化(エネルギー保存則)

$$\frac{DS}{Dt} - f = 0 \quad (D-11)$$

ここで、ラグランジュの微分記号

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad (D-12)$$

を用いた。 $u$ 、 $v$ は $x$ 、 $y$ 方向の流速、 $\rho$ は密度、 $D$ は圧力、 $S$ はエントロピを表わす。 $w_x$ 、 $w_y$ はそれぞれ $x$ 、 $y$ 方向の外力(壁摩擦、体積力等)、 $g$ は涌出しの強さを表わす。さらに $f$ はエントロピの変化。

$$f = \frac{(\kappa-1)C_v \rho}{P} (q - u w_x - v w_y) \quad (D-13)$$

$q$ は発熱(放熱)等である。

(D-8)～(D-11)式は、独立変数 $t$ 、 $x$ 、 $y$ の3個、未知関数 $u$ 、 $v$ 、 $P$ 、 $\rho$ 、 $S$ の5個から成っている一階の連立偏微分方程式である。関係式(D-7)を用いて、エントロピ $S$ を消去すると、(D-11)式は次の形で書ける。

$$\frac{DP}{Dt} - \frac{\kappa P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} - \frac{P}{C_v} \cdot f = 0 \quad (D-14)$$

以上によって方程式の数と未知関数の数が一致した。しかしこの結果、(D-11)式は(D-14)式のように複雑になった。このため、計算の都合上、変数変換によって、基礎式を書き直す。

$$\sigma = P^{(\kappa-1)/2\kappa} \quad (D-15)$$

$$\phi = \frac{2}{\kappa-1} \frac{C}{\sigma} \quad (D-16)$$

$$C = \sqrt{\kappa P / \rho} \quad (D-17)$$

$C$ は音速、 $\phi$ はエントロピ $S$ に替わる変数で、 $S$ の増加関数であることがわかる。(D-15)、(D-16)、(D-17)式より得られる。

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\kappa-1}{2\kappa} \cdot \frac{-(\kappa+1)}{P^{2\kappa}} dP \\ &= \frac{\kappa-1}{2\kappa} \cdot \frac{1}{\sigma P^{\frac{1}{\kappa}}} dP \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{\rho} &= \frac{2\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{\sigma \cdot P^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho} d\sigma \\
&= \frac{2\kappa}{\kappa-1} \cdot \sigma \cdot \frac{C^2 P^{\frac{1}{\kappa}}}{\sigma} d\sigma \\
&= \frac{2\kappa \sigma}{\kappa-1} \cdot \frac{C^2}{\kappa} \cdot P^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} d\sigma \\
&= \frac{2}{\kappa-1} C^2 \sigma \cdot \frac{1}{\sigma^2} d\sigma \\
&= \frac{\kappa-1}{2} \cdot \sigma \phi^2 d\sigma
\end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{\rho} &= \frac{1}{\rho} d\left(\frac{\kappa P}{C^2}\right) \\
&= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\kappa}{C^2} dP - \frac{2\kappa P}{C^3} d\sigma \right) \\
&= \frac{\kappa}{C^2} \frac{\kappa-1}{2} \sigma \phi^2 d\sigma - \frac{2\kappa P}{C^3 \rho} \frac{\kappa-1}{2} (\sigma d\phi + \phi d\sigma) \\
&= \frac{\kappa}{C} \phi d\sigma - \frac{\kappa-1}{C} (\sigma d\phi + \phi d\sigma) \\
&= \frac{2}{\kappa-1} \frac{1}{\sigma} d\sigma - \frac{2}{\phi} d\phi
\end{aligned}$$

等を用いると、結局、基礎方程式は、

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{\kappa-1}{2} \sigma \phi^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + w_x = 0 \quad (D-18)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{\kappa-1}{2} \sigma \phi^2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} + w_y = 0 \quad (D-19)$$

$$\frac{D\sigma}{Dt} + \frac{\kappa-1}{2} \sigma \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\kappa-1}{2} \sigma \left( \frac{f}{C_v \kappa} + g \right) = 0 \quad (D-20)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} - \frac{f}{2C_v \kappa} \phi = 0 \quad (D-21)$$

となる。

## D-II 二次元特性曲線法

一般に一階偏微分方程式系

$$L_\lambda = \sum_{\mu=1}^n \sum_{i=1}^m A_{\lambda\mu}^i \frac{\partial u_\mu}{\partial x_i} + F_\lambda = 0 \quad (D-22)$$

$$(\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

を考える。独立変数の変換

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \quad (D-23)$$

を行うと

$$L_\lambda = \sum_{\mu=1}^n \sum_{i=1}^m A_{\lambda\mu}^i \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} \frac{\partial u_\mu}{\partial \xi_1} + \sum_{k=2}^m \sum_{\mu=1}^n \sum_{i=1}^m A_{\lambda\mu}^i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \xi_k} + F_\lambda = 0 \quad (D-24)$$

$\xi_1 = \phi(x_1, x_2, \dots, x_m) = \text{const}$  が、偏微分方程式(D-22)式の特性曲面である、とは、この曲面上にすべての  $\{u_\mu\}$  の値を与えた時にも、(D-22)式の解が一意的に決まらないような面、と定義される。曲面  $\varphi = \text{const}$  上にすべての  $\{u_\mu\}$  を与えると、曲面に沿っての方向微係数はすべて自動的に決ってしまう。しかし、曲面の法線方向の微分、すなわち側出微係数  $\{\frac{\partial u_\mu}{\partial \xi_1}\}$  は全く任意である。ところが各変数は偏微分方程式(D-22)によって制約されており、一般には、これによって側出微係数も一意的に決ってしまう。このとき、すべての微係数が与えられたこととなり、曲面の近傍では解が一意的に決定されることになる。逆に側出微係数が一意的に決まらないときは、たとえ曲面上にすべての情報  $\{u_\mu\}$  を与えても、直ぐその隣りの点では、さらに別の情報を与えない限り解は求まらない。すなわち曲面  $\varphi = \text{const}$  が特性曲面であるとは、側出微係数が一意的に決まらない曲面、である。このように、特性曲面を境にして、 $\{u_\mu\}$  (物理量)に不連続が存在し得る。したがって特性曲線法は、この不連続を横切らない方向に積分を進めることによって解の精度を保とうとする方法、といえる。

以上の考察によって、方程式系(D-24)において、曲面  $\xi_1 = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m) = \text{const}$  の側出微係数は、左辺第一項のみであり、 $\varphi = \text{const}$  が特性曲面である条件は、行列

$$\left( \sum_{i=1}^m A_{\lambda\mu}^i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \quad \text{--- (D-25)}$$

の行列式が 0、即ち

$$\left| \left( \sum_{i=1}^m A_{\lambda\mu}^i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \right| = 0 \quad \text{--- (D-25)}$$

方程式系(D-18)～(D-21)に適用すると、

$$\begin{vmatrix} \frac{D\varphi}{Dt} & 0 & \frac{\kappa-1}{2} \sigma \phi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{D\varphi}{Dt} & \frac{\kappa-1}{2} \sigma \phi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} & 0 \\ \frac{\kappa-1}{2} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\kappa-1}{2} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{D\varphi}{Dt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{D\varphi}{Dt} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{--- (D-26)}$$

(D-26)式を展開すると

$$\left( \frac{D\varphi}{Dt} \right)^2 \left[ \left( \frac{D\varphi}{Dt} \right)^2 - \left( \frac{\kappa-1}{2} \sigma \phi \right)^2 \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] = 0$$

(D-16)式を用いて書き直すと、

$$\left( \frac{D\varphi}{Dt} \right)^2 \left[ \left( \frac{D\varphi}{Dt} \right)^2 - C^2 \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] = 0 \quad \text{--- (D-27)}$$

したがって、

$$\frac{D\varphi}{Dt} = 0 \quad \text{--- (D-28)}$$

$$\left( \frac{D\varphi}{Dt} \right)^2 - C^2 \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} = 0 \quad \text{--- (D-29)}$$

(D-28)、(D-29)式は特性曲面の方程式、即ち特性偏微分方程式である。この曲面の性質を調べるために、一階偏微分方程式に関する特性帶の理論を利用する。これによると、偏微分方程式

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, \varphi, P_1, P_2, \dots, P_m) = 0 \quad (D-30)$$

の特性微分方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{F_{P_1}} &= \frac{dx_2}{F_{P_2}} = \dots = \frac{d\varphi}{P_1 F_{P_1} + P_2 F_{P_2} + \dots + P_m F_{P_m}} \\ &= \frac{-dP_1}{F_{x_1} + P_1 F_\varphi} = \frac{-dP_2}{F_{x_2} + P_2 F_\varphi} = \dots = d\tau \end{aligned} \quad (D-31)$$

ただし、 $P_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ ,  $F_{P_i} = \frac{\partial F}{\partial P_i}$  等である。

(D-31) 式は  $m$  次元空間に一つの方向 ( $\tau$  方向) を与える。これを積分したものが (D-30) 式に対する特性曲線である。 $\tau = 0$  において、初期値  $x_i = x_i^0$ ,  $\varphi = \varphi^0$ ,  $P_i = P_i^0$  を与えると特性曲線にそって (D-31) 式が積分され、結局 (D-30) 式が積分される。今、特性曲線ではない曲線を  $m$  次元空間に引いて、この曲線上の各点に (D-30) 式を満たす限りで、任意に  $\varphi$ ,  $P_i$  を与えると、各点から出発する特性曲線にそって積分され、結局、一つの曲面上で  $\varphi$  の値が決定される。

(D-28), (D-29) 式等の特性偏微分方程式の特性曲線は特性射線又は陪特性曲線とよばれる。

(D-28) 式に (D-31) 式を適用すると、

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dt}{1} = d\tau \quad (D-32)$$

即ち、 $\frac{dx}{dt} = u$ ,  $\frac{dy}{dt} = v$  (D-33)

又、(D-29) 式に適用すると、

$$\frac{dx}{u \frac{D\varphi}{Dt} - C^2 \varphi_x} = \frac{dy}{v \frac{D\varphi}{Dt} - C^2 \varphi_y} = \frac{dt}{\frac{D\varphi}{Dt}} = d\tau \quad (D-34)$$

即ち、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{u \frac{D\varphi}{Dt} - C^2 \varphi_x}{\frac{D\varphi}{Dt}} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{v \frac{D\varphi}{Dt} - C^2 \varphi_y}{\frac{D\varphi}{Dt}} \end{array} \right. \quad (D-35)$$

又、 $\varphi$ ,  $\varphi_t$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  は (D-33) 又は (D-35) 方向にそって一定となる。

ここで、 $\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  なる記号を用いた。

射線方向 (D-33) を考える。これは、流線方向を示しており、従って、不連続が流体流子の運動にそって伝播することを意味している。熱、エントロピー等は、これに従う。一方、射線方向 (D-35) を考えると、

$$\left( \frac{dx}{dt} - u \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} - v \right)^2 = C^2 \quad (D-36)$$

が得られる。 $\frac{dx}{dt}$ 、 $\frac{dy}{dt}$ は射線にそっての $x$ 、 $y$ 座標の時間微分、いいかえれば、不連続の伝播速度の $x$ 、 $y$ 方向成分である。したがって、(D-36)式の物理的な意味は、射線方向(D-35)に従って、物理量の不連続は、流速に対する相対速度が音速に等しい速度で伝播する。即ち、(D-17)式によって定義されたCが音速の定義として正当化される。

今、 $\tau = 0$ で $(t_0, x_0, y_0)$ を通り、 $\varphi^\circ$ 、 $\varphi_t^\circ$ 、 $\varphi_x^\circ$ 、 $\varphi_y^\circ$ の初期値を取る初期曲線を考えると、(D-29)式の積分曲面で、

$$\varphi = \varphi^\circ$$

なる曲面が得られる。ところで、曲面 $\varphi = \varphi^\circ$ の中で、初期値 $\varphi_t^\circ$ 、 $\varphi_x^\circ$ 、 $\varphi_y^\circ$ の内2つは全く自由に与えることが出来るが、第3のパラメータは(D-29)式によって自動的に決まつてくる。

(D-29)式より、

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm C \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} \quad (D-37)$$

(D-37)式を(D-35)式に代入して

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u + C \cdot \frac{\mp \varphi_x}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}} \\ \frac{dy}{dt} = v + C \cdot \frac{\mp \varphi_y}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}} \end{cases} \quad (D-38)$$

$\varphi_x^\circ$ 、 $\varphi_y^\circ$ を任意に選ぶとし、

$$\begin{cases} \frac{\mp \varphi_x}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}} = \cos \theta \\ \frac{\mp \varphi_y}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}} = \sin \theta \end{cases} \quad (D-39)$$

によって定義されるパラメータ $\theta$ を導入すると、(D-38)式は

$$\begin{cases} dx = (u + C \cdot \cos \theta) dt \\ dy = (v + C \cdot \sin \theta) dt \end{cases} \quad (D-40)$$

と書ける。(D-40)式は、 $\tau = 0$ での $(t_0, x_0, y_0)$ を通る特性曲面 $\varphi = \varphi^\circ$ 上の特性曲線、すなわち特性射線の満たすべき方程式となっている。これは、点 $(t_0, x_0, y_0)$ を頂点とする円錐(特性射線錐)を形成する。

次に元の偏微分方程式(D-18)～(D-21)式から側出微係数を消去して、特性曲面内の微分(内在微係数)のみの関係を求める。一般に(D-24)式において、一次結合

$$\sum_{\lambda=1}^n h_\lambda L_\lambda = 0 \quad (D-41)$$

を作り、 $\frac{\partial u_n}{\partial \xi_1}$ の係数を0とするには、

$$\sum_{\lambda=1}^n h_\lambda \cdot A'_{\lambda\mu} = 0 \quad (D-42)$$

となる  $\{h_\lambda\}$  を用いればよい。但し  $A'_{\lambda\mu}$  は

$$A'_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^m A'_{\lambda\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (D-43)$$

(D-18)～(D-21)式に適用すると、

$$(A'_{\lambda\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{D\varphi}{Dt} & 0 & \frac{\kappa-1}{2} \sigma \varphi^2 \varphi_x & 0 \\ 0 & \frac{D\varphi}{Dt} & \frac{\kappa-1}{2} \sigma \varphi^2 \varphi_y & 0 \\ \frac{\kappa-1}{2} \sigma \varphi_x & \frac{\kappa-1}{2} \sigma \varphi_y & \frac{D\varphi}{Dt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{D\varphi}{Dt} \end{pmatrix}$$

$$= \pm C \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & \varphi \cdot \varphi_x & 0 \\ 0 & -1 & \varphi \cdot \varphi_y & 0 \\ \frac{\cos \theta}{\varphi} & \frac{\sin \theta}{\varphi} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (D-44)$$

(D-42)式の解は

$$(h_\lambda) = (\cos \theta, \sin \theta, \varphi, 0) \quad (D-45)$$

よって、(D-18)  $\times \cos \theta +$  (D-19)  $\times \sin \theta +$  (D-20)  $\times \varphi +$  (D-21)  $\times 0$  より、

$$\begin{aligned} & \phi \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (u + C \cos \theta) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (v + C \sin \theta) \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\} \\ & + \cos \theta \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u + C \cos \theta) \frac{\partial u}{\partial x} + (v + C \sin \theta) \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \\ & + \sin \theta \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + (u + C \cos \theta) \frac{\partial v}{\partial x} + (v + C \sin \theta) \frac{\partial v}{\partial y} \right\} \\ & = -C \left\{ \sin^2 \theta \frac{\partial u}{\partial x} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \cos^2 \theta \frac{\partial v}{\partial y} \right\} \\ & - \left\{ w_x \cos \theta + w_y \sin \theta - C \left( \frac{f}{C_v \kappa} + g \right) \right\} \end{aligned} \quad (D-46)$$

射線方向(D-40)式を  $\tau$  方向とすると、 $\tau$  方向微分は、

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + C \cos \theta) \frac{\partial}{\partial x} + (v + C \sin \theta) \frac{\partial}{\partial y} \quad (D-47)$$

によって表わされる。よって、(D-46)式は、 $\tau$  方向に関して、全微分形で

$$\phi d\sigma + \cos \theta \cdot du + \sin \theta \cdot dv = -C \cdot s \cdot d\tau - \ell \cdot d\tau \quad (D-48)$$

となる。ここで、 $s$ 、 $\ell$ は

$$s = \sin^2 \theta \frac{\partial u}{\partial x} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \cos^2 \theta \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{--- (D-49)}$$

$$\ell = w_x \cdot \cos \theta + w_y \cdot \sin \theta - C \left( \frac{f}{C_v \kappa} + g \right) \quad \text{--- (D-50)}$$

$s$ の中には、射線方向以外の微分を含んでいる。したがって、積分の際には、この微分を消去するような解式を構成する必要がある。

一方流線に沿っては、(D-20)式から

$$\phi d\sigma = \left\{ -C \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + C \left( \frac{f}{C_v \kappa} + g \right) \right\} dt \quad \text{--- (D-51)}$$

を得る。これは、(D-28)式に対する特性曲面の側出微係数を含んでいる。したがって、(D-48)式と組合せて、これらを消去した解式を構成する必要がある。

同様に、流線に沿っては、(D-21)式より

$$d\phi = \frac{f}{2C_v \kappa} \phi dt \quad \text{--- (D-52)}$$

が得られる。

## D-II 積 分 法

連立微分方程式(D-18)～(D-21)式の数値解の求め方を述べる。簡単のため、外力  $w_x$ 、 $w_y$ 、熱の出入  $f$ 、涌出し  $g$  等すべて0とする。したがって(D-48)式において  $\ell$  は0となる。点P( $t_0, x_0, y_0$ )における  $u$ 、 $v$ 、 $\sigma$ 、 $\phi$  の値  $u_0$ 、 $v_0$ 、 $\sigma_0$ 、 $\phi_0$  を微小時間幅  $h$  だけ前の時刻の  $u$ 、 $v$ 、 $\sigma$ 、 $\phi$  の値から求める。点Pにおける4本の射線を考え、順次1～4の番号をつけ、その射線方向  $\theta_i$  をそれぞれ  $\phi_i$  ( $i=1 \sim 4$ ) とし、 $\phi_i = -\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$  と選ぶ。

$\phi_i$  の選び方を変えたとき、下記の各式は多少変

更される。 $\phi_i$  は点P即ち  $\tau=0$  での  $\theta_i$  の値であり、 $\tau \neq 0$  のとき、特性射線錐は、一般に少しねじれが起り、高次近似を行うときには、このことを考慮しなければならない。

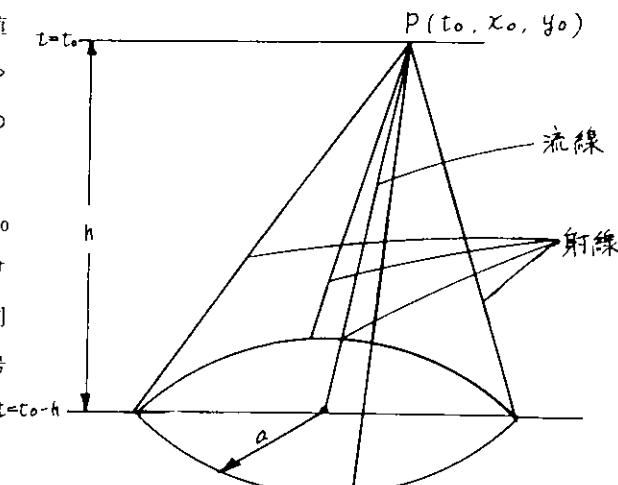
射線1が面  $t=t_0-h$  と交わる点  $P_1(t_0-h, x_1, y_1)$  での値にはすべて添字1をつける。たとえば、点  $P_1$  での音速は  $C_1$  と記す。同様に、射線2、3、4に対しても、それぞれの番号の添字をつける。

(D-48)式を2次近似の差分で書き下すと、

$$P_i(\sigma_0 - \sigma_i) + U_i(u_0 - u_i) + V_i(v_0 - v_i)$$

$$= -\frac{1}{2} (C_0 s_{i0} + C_i s_i) h \quad (D-53)$$

$$(i=1 \sim 4)$$



$$(t_0-h, x_0 - (u + C \cos \theta) h, y_0 - (v + C \sin \theta) h)$$

図2.D-1

但し、

$$P_i = \frac{1}{2} (\phi_0 + \phi_i) \quad (D-54)$$

$$U_i = \frac{1}{2} (\cos \phi_i + \cos \theta_i) \quad (D-55)$$

$$V_i = \frac{1}{2} (\sin \phi_i + \sin \theta_i) \quad (D-56)$$

又、 $s_{i0}$  は点 P における  $\theta = \phi_i$  の s の値である。

点 P での解  $u_0, v_0, \sigma_0, \phi_0$  の近似値を  $\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{\sigma}_0, \bar{\phi}_0$  とすると、(D-53) 式は、

$$P_i \delta \sigma_0 + U_i \delta u_0 + V_i \delta v_0 = -R_i - \frac{1}{2} C_0 s_{i0} h \quad (D-57)$$

$(i = 1 \sim 4)$  (D-57)

但し、 $\delta \sigma_0 = \sigma_0 - \bar{\sigma}_0$  等を表わす。又、

$$R_i = P_i (\bar{\sigma}_0 - \sigma_i) + U_i (\bar{u}_0 - u_i) + V_i (\bar{v}_0 - v_i) + \frac{1}{2} h C_i R_i \quad (D-58)$$

$(i = 1 \sim 4)$

$\phi_i = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$  を考慮し、(D-57) 式における  $i = 1$  から  $i = 3$  を引くと、 $R_{i0}$  は消去でき、

$$(P_1 - P_3) \delta \sigma_0 + (U_1 - U_3) \delta u_0 + (V_1 - V_3) \delta v_0 = - (R_1 - R_3) \quad (D-59)$$

同様に  $i = 2$  から  $i = 4$  を引くと

$$(P_2 - P_4) \delta \sigma_0 + (U_2 - U_4) \delta u_0 + (V_2 - V_4) \delta v_0 = - (R_2 - R_4) \quad (D-60)$$

次に (D-51) 式の差分近似を求める。点 P を通る流線が平面  $t = t_0 - h$  で交わる点を  $P_5$  ( $t_0 - h, x_5, y_5$ ) とし、添字は 5 を用いる。(D-51) 式を二次近似すると

$$P_5 (\sigma_0 - \sigma_5) = - \left\{ C_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 + C_5 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_5 \right\} \frac{h}{2} \quad (D-61)$$

$\delta \sigma_0$  を用いて変形すると

$$P_5 \delta \sigma_0 = -R_5 - \frac{h}{2} C_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 \quad (D-62)$$

但し、 $P_5 = \frac{1}{2} (\phi_0 + \phi_5)$  (D-63)

又、 $P_5 = P_5 (\bar{\sigma}_0 - \sigma_5) + \frac{1}{2} h C_5 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_5$  (D-64)

(D-57) 式の 4 個の式の和から (D-62) 式の 2 倍を引くと、点 P での微分が消去され、

$$(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - 2 P_5) \delta \sigma_0 + (U_1 + U_2 + U_3 + U_4) \delta u_0 + (V_1 + V_2 + V_3 + V_4) \delta v_0 = -2 R_5 - (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \quad (D-65)$$

(D-59)、(D-60)、(D-65) 式は、いずれも  $h$  の 2 次の精度で成立つ。

$P_1 - P_3 = O(h)$ 、 $U_1 - U_3 = -\sqrt{2} + O(h)$ 、 $V_1 - V_2 = -\sqrt{2} + O(h)$  を考慮すると、 $\delta \sigma_0$ 、 $\delta u_0$ 、 $\delta v_0$  は、 $\bar{\sigma}_0$ 、 $\bar{u}_0$ 、 $\bar{v}_0$  が 0 次又は 1 次の精度のとき、1 次又は 2 次の精度で、

$$-\sqrt{2} \delta u_0 - \sqrt{2} \delta v_0 = -(R_1 - R_3) \quad (D-66)$$

を満足する。同様にして、

$$\sqrt{2} \delta u_0 - \sqrt{2} \delta v_0 = -(R_2 - R_4) \quad (D-67)$$

$$2 \bar{\phi}_0 \delta \sigma_0 = 2R_5 - (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \quad (D-68)$$

(D-66)、(D-67)、(D-68) 式を解くと、

$$\delta u_0 = \frac{R_1 + R_4 - R_2 - R_3}{2\sqrt{2}} \quad (D-69)$$

$$\delta v_0 = \frac{R_1 + R_2 - R_3 - R_4}{2\sqrt{2}} \quad (D-70)$$

$$\delta \sigma_0 = \frac{2R_5 - R_1 - R_2 - R_3 - R_4}{2\bar{\phi}_0} \quad (D-71)$$

(D-69) ~ (D-71) を計算するためには、面  $t = t_0 - h$  上の点  $P_i$  の座標を求めなければならない。射線方向については (D-40) 式、流線方向については (D-38) 式を二次近似の差分で置きかえると、

$$\begin{cases} x_i = x_0 - \frac{1}{2} h (u_0 + C_0 \cos \phi_i + u_i + C_i \cos \theta_i) \\ y_i = y_0 - \frac{1}{2} h (v_0 + C_0 \sin \phi_i + v_i + C_i \sin \theta_i) \end{cases} \quad (i=1 \sim 4) \quad (D-72)$$

$$\begin{cases} x_5 = x_0 - \frac{1}{2} h (u_0 + u_5) \\ y_5 = y_0 - \frac{1}{2} h (v_0 + v_5) \end{cases} \quad (D-73)$$

但し、

$$\theta_i = \phi_i + h D_i + O(h^2) \quad (D-74)$$

一次近似では (D-72)、(D-73) 式の右辺第二項は、点  $P$  のみの値で代表する。二次近似を行う時は、錐のねじれを表わす項  $h \cdot D_i$  が必要となる。D の計算は少し長くなり、結果は、

$$D = -\sin \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} + \cos^2 \phi \frac{\partial u}{\partial y} - \sin \phi \cos \phi \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \sin^2 \phi \frac{\partial v}{\partial x} \quad (D-75)$$

となる。

(D-72)、(D-73) によって与えられる各点  $P_i$  の  $\sigma_i$ 、 $\phi_i$ 、 $u_i$ 、 $v_i$  を一次近似、二次近似に応じて、それぞれの精度で補簡法によって計算する。

計算手順は、次の通りである。

- a) 点  $P_i$  ( $i=1 \sim 4$ )、点  $P_5$  における  $u$ 、 $v$ 、 $\sigma$ 、 $\phi$  を仮定する。
- b) 点  $P$  における近似値  $u_0 = \bar{u}_0$ 、…… を仮定する。

- c) (D-72), (D-73) によって、 $P_i(x_i, y_i)$ ,  $P_5(x_5, y_5)$  を求める。  
d)  $u_i, v_i, \sigma_i, \phi_i$  ( $i = 1 \sim 4$ ),  $u_5, v_5, \sigma_5, \phi_5$  を補間法で求める。  
e) (D-58), (D-64) によって、 $R_i$  ( $i = 1 \sim 4$ ),  $R_5$  を計算する。  
f) (D-69)～(D-71) によって、 $\delta u_0, \delta v_0, \delta \sigma_0$  を計算する。  
g)  $u_0, v_0, \sigma_0, \phi_0 (= \phi_5)$  を求める。  
h) 計算が収束していなければ b) にもどる(二次近似のみ)。

次に境界条件の取扱いについて記述する。

### 固体表面

固体表面の領域内から領域外への法線ベクトルの  $x$  軸となす角を  $\omega_0$  とする。壁が速度  $Q_0$  で法線方向に運動するとき、境界条件は

$$Q_0 = u_0 \cos \omega_0 + v_0 \sin \omega_0 \quad (D-76)$$

で与えられる。3つの射線方向を  $\phi_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) =  $\omega_0 - \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega_0 + \frac{\pi}{2}$  に選ぶ。他の一つは領域外に出て引けない。

したがって、(D-60)式はそのまま成立つが、(D-51)式は得られない。又、(D-65)式に対応した式は、(D-57)における  $i = 2, 4$  に対する式と  $i = 3$  に対する式の2倍の和から、(D-62)の2倍を引くと得られる。

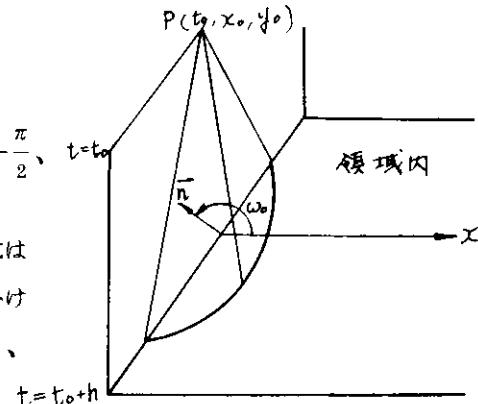


図 2. D-2

$$(P_2 + P_4 + 2P_3 - 2P_5) \delta \sigma_0 + (U_2 + U_4 + 2U_3) \delta U_0 \\ + (V_2 + V_4 + 2V_3) \delta v_0 = 2R_5 - (R_2 + R_4 + 2R_3) \quad (D-77)$$

(D-76)式より

$$\cos \omega_0 \cdot \delta u_0 + \sin \omega_0 \cdot \delta v_0 = Q_0 - \bar{u}_0 \cos \omega_0 - \bar{v}_0 \sin \omega_0 \quad (D-78)$$

(D-60)式にて、 $P_2 - P_4 = O(h)$ ,  $U_2 - U_4 = 2 \sin \omega_0 + O(h)$ ,  $V_2 - V_4 = -2 \cos \omega_0 + O(h)$  を考慮すると、

$$\sin \omega_0 \cdot \delta u_0 - \cos \omega_0 \cdot \delta v_0 = \frac{1}{2} (R_4 - R_2) \quad (D-79)$$

(D-77)式にて  $P_2 + P_4 + 2P_3 - 2P_5 = 2\bar{\phi}_0 + O(h)$ ,  $U_2 + U_4 + 2U_3 = 2 \cos \omega_0 + O(h)$ ,  $V_2 + V_4 + 2V_3 = 2 \sin \omega_0 + O(h)$  を考慮すると、

$$\bar{\phi}_0 \delta \sigma_0 + \cos \omega_0 \delta u_0 + \sin \omega_0 \delta v_0 = \frac{1}{2} \{ 2R_5 - (R_2 + R_4 + 2R_3) \} \quad (D-80)$$

(D-78)～(D-80)を解くと

$$\delta u_0 = (Q_0 - \bar{u}_0 \cos \omega_0 - \bar{v}_0 \sin \omega_0) \cos \omega_0 + \frac{1}{2} (R_4 - R_2) \sin \omega_0 \quad (D-81)$$

$$\delta v_0 = (Q_0 - \bar{u}_0 \cos \omega_0 - \bar{v}_0 \sin \omega_0) \sin \omega_0 - \frac{1}{2} (R_4 - R_2) \cos \omega_0 \quad (D-82)$$

$$\delta \sigma_0 = \frac{1}{\phi_0} \left\{ R_5 - \frac{1}{2} (R_2 + R_4) - R_3 - \cos \omega_0 \cdot \delta u_0 - \sin \omega_0 \cdot \delta v_0 \right\} \quad (D-83)$$

### 流入部

境界を通して、境界に垂直な方向の速度  $Q_0$  ( $< 0$ ) で流入する場合、(D-81)、(D-82)はそのまま成立する。一方、流線にそっての差分式は、領域内部には作れない。したがって、(D-77)式の代りに次式を用いる。

$$P_3 (\sigma_0 - \sigma_3) + U_3 (u_0 - u_3) + V_3 (v_0 - v_3) = - \frac{h}{2} (C_0 s_{30} + C_3 s_3) \quad (D-84)$$

ここで、 $s_{30}$  はすでに計算された  $u_0$ 、 $v_0$  を用いて計算する。よって、

$$\delta \sigma_0 = - \frac{1}{\phi_0} \left\{ \cos \omega_0 \delta u_0 + \sin \omega_0 \delta v_0 + R_3 + \frac{1}{2} h C_0 s_{30} \right\} \quad (D-85)$$

又、境界で圧力（又は  $\sigma_0$ ）が与えられた時は、(D-79)、(D-85)で  $\delta \sigma_0 = 0$  とおくと、

$$\delta u_0 = \frac{1}{2} (R_4 - R_2) \sin \omega_0 - (R_3 + \frac{1}{2} h C_0 s_{30}) \cos \omega_0 \quad (D-86)$$

$$\delta v_0 = - \frac{1}{2} (R_4 - R_2) \cos \omega_0 - (R_3 + \frac{1}{2} h C_0 s_{30}) \sin \omega_0 \quad (D-87)$$

### 流出部

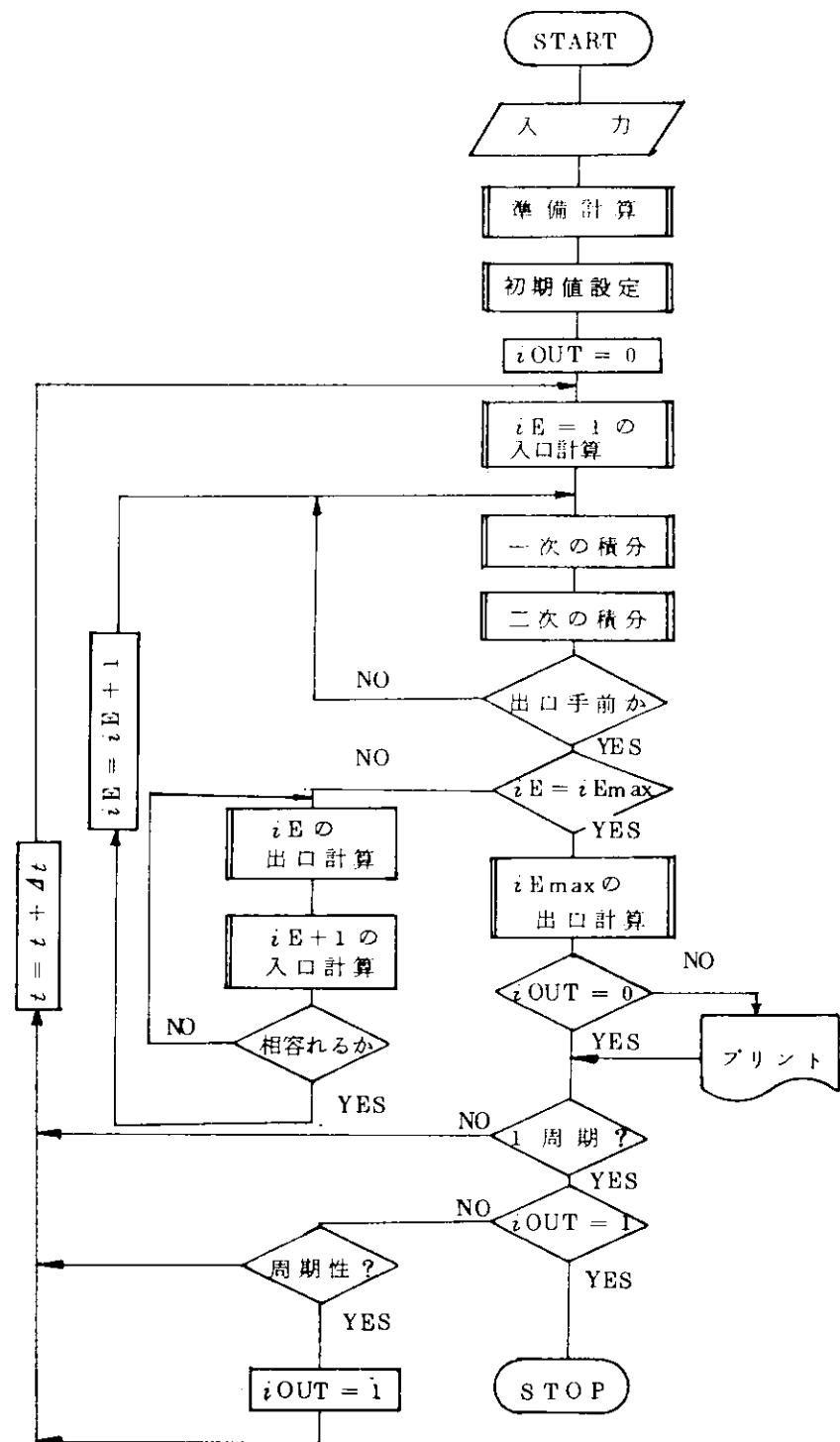
境界上で圧力（又は  $\sigma_0$ ）が与えられて流出するとき、(D-81)、(D-82)で  $\delta \sigma_0 = 0$  とおくと、

$$\delta u_0 = \frac{1}{2} (R_4 - R_2) \sin \omega_0 + \frac{1}{2} \left\{ 2R_5 - (R_2 + R_4 + 2R_3) \right\} \cos \omega_0 \quad (D-88)$$

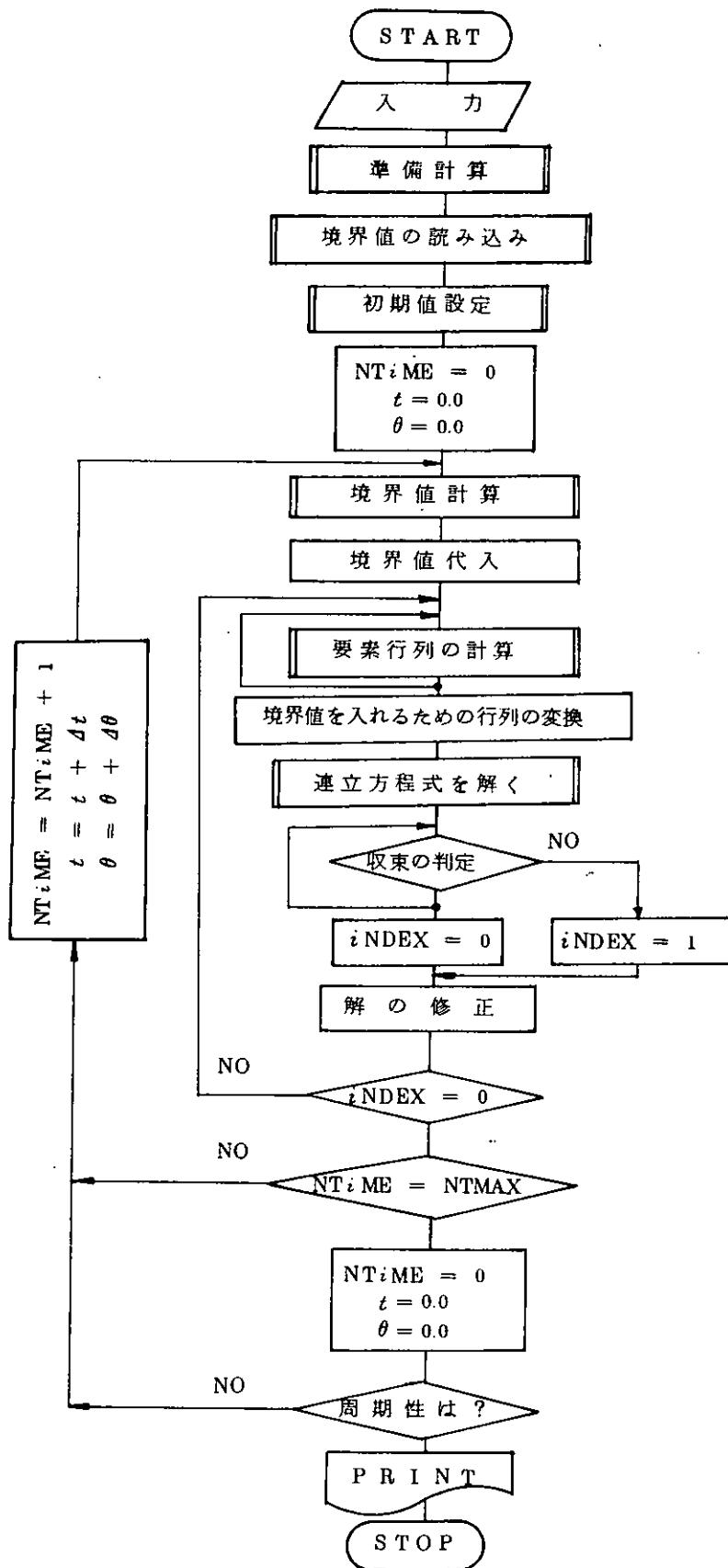
$$\delta v_0 = - \frac{1}{2} (R_4 - R_2) \cos \omega_0 + \frac{1}{2} \left\{ 2R_5 - (R_2 + R_4 + 2R_3) \right\} \sin \omega_0 \quad (D-89)$$

## 付 錄 E

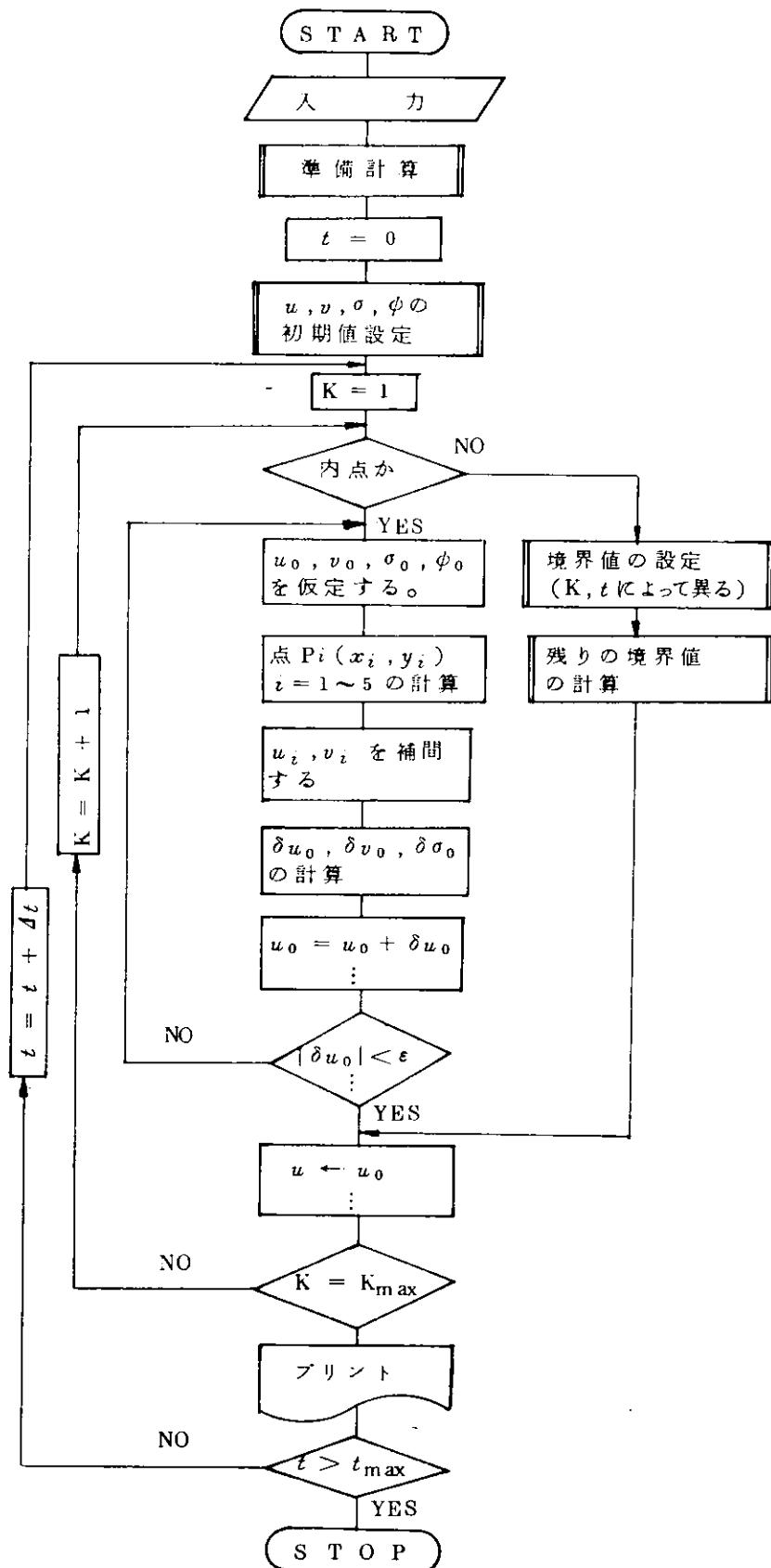
## E-I 一次元特性曲線法のフローチャート



E-II 有限要素法のフローチャート



E - II 二次元特性曲線法のフローチャート



## 参考文献

### 一次元脈動シミュレーション — 文献

- ・ 塚原、塩出：日本船用機関学会誌 vol. 8 , No. 9 , 1973
- ・ 内田：内燃機関 vol. 5 , No. 50 ~ 53 , 1966
- ・ 梶、八田：東京大学宇宙航空研究所報告、10巻4号、1972
- ・ 大井：応用偏微分方程式論、岩波、1951
- ・ Jenny, E., The Brown Boveri Review P. 447, 1950
- ・ Benson, R. S., Garg, R.D. and Woollatt, D., Int. J. Mech. Sci. vol. 6, P. 177, 1964
- ・ Lister, M., 電子計算機のための数学的方法、P. 154、鹿島出版会

### 有限要素法による二次元流れ — 文献

- ・ 藤野、山田：日本鋼構造協会第5回大会研究集会、マトリックス構造解析法研究発表論文集、P. 537, 1971
- ・ 川原、中川：機械の研究、vol. 25, P. 1379, 1973
- ・ Lax, P., Wendroff, B., Comm. Pure Appl. Math., vol. 13, P. 217, 1960, vol. 17, P. 381, 1964

### 二次元特性曲線法 — 文献

- ・ Butler, D. S., Proc. Roy. Soc. (London), Vol. A225, P. 232, 1960
- ・ Elliott, L.A., Proc. Roy. Soc. (London), Vol. A267, P. 558, 1962
- ・ Richardson, D. R., Methods in Computational Physics, Vol. 3, P. 285, 1964
- ・ Butler, D. S., "Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations", (1962) edited by L. Fox, Pergamon Press.

## 第3編 二サイクル機関の掃排気ポート付近及びシリンダ内のガス流れの研究

### 1. まえがき

排気管内の圧力状態が掃気の流入に影響を与えたる、最高圧力や排気温度指度の変動の要因となることは、すでに述べた通りである。その最高圧力や排気温度指度は熱負荷との関連で重要であるにもかかわらず、相互の関係を把握できにくいのが現状である。上記の問題は掃気期間の掃排気の流れと密接な関係があることから、掃気に関する基礎的な調査を順次行ない解決への糸口とする。一方その調査によって得られた結果は性態及び排気脈動シミュレーションの参考資料とするためである。

本年度の計画は、(1) 定常流実験装置 260φ の定常流模型の製作と実験、(2) 一サイクル非定常実験装置の設計となっており、以下に述べる。

### 2. 定常流 260φ 掃気実験装置の製作と実験

実験的調査の対象として KZ 52/90 二サイクルディーゼル機関（静圧過給方式）を選んだ。その幾何学的相似の1/2模型（シリンダ径 260φ）を製作し、定常流実験により掃気期間のシリンダ内流れ調査及び性能シミュレーションに必要な参考資料、掃気係数、掃排気孔の流量係数のデータを得るために実験を行なった。

掃気過程について流体力学的に相似になるように模型によって実験しなければならないが、簡単な模型で同時にすべての条件を満足させることは難かしい。

掃排気の圧力差が小さいのと、この期間に掃気の流れは熱的影響が少ないとして無視すると掃気は非圧縮性の流れであると考えることが出来る。

そこで模型と実機との間には、次の無次元数が同じであることが必要である。

$$\frac{VD}{\nu} = Re \quad \text{レイノルズ数}$$

$$\frac{P}{\rho V^2} = Eu \quad \text{オイラー数} \quad (\text{圧縮性であると } Eu = \frac{P}{\rho V^2} = \frac{1}{k} \frac{a^2}{V_2} = \frac{1}{k} \frac{1}{M^2} \quad a = \sqrt{\frac{kP}{\rho}})$$

$$\frac{Vt}{D} = Sh \quad \text{ストロハル数}$$

オイラー数は他の無次元数との間に次の関係がある。

$$\frac{\rho}{\rho V^2} = f \left( \frac{VD}{\nu}, \frac{Vt}{D} \right)$$

結局、簡単に考えて非定常な流れに関する影響は別の動模型実験によって検討することにすると、Re 数によってオイラー数は決ってしまうので、この流れ実験においてレイノルズ数が等しいという条件で十分となる。流体に対してかなり大きなシリンダ径をモデルにすると、そのシリンダ系を流れる流体の速度がある程度大きい時粘性は慣性に対して二次的に作用しているので必ずしも実機と模型との間にレイノルズ数を合わせる必要はないと考えられ、定常流による実験によって低い流速でシリンダ系を流し、ある程度以上のシリンダ内のレイノルズ数を与え、乱流域とすることにより、実際の現象と同じような flow pattern や流れ抵抗が期待できると考えられる。

Jante は掃気についての模型実験において、掃気圧力 4.0 ~ 2.000 mmAq の範囲で実験を行ない、シリンダ内の flow pattern に殆んど変化はないとの報告をしている。以上の理由から定常流模型実験における掃気圧は 1.00

mmAq 前後で行なうに至った。

## 2.1 定常流 260φ 掃気実験装置の製作

組立図を図3.1に、部品図を図3.2～3.4に、配置図を図3.5に、全体配置の写真を図3.6に、模型本体の組立の写真を図3.7に示す。

## 2.2 定常流 260φ 掃気実験 — (定常流による掃気期間のガス流れ調査) —

### 2.2.1 掃 気 係 数

掃気期間にシリンドラ系(掃気孔 - シリンドラ - 排気孔)を流れる流動抵抗はシリンドラ内のガス交換やガスの短絡、掃排気孔の流量係数、開口端排気面積比などに影響し複雑である。以下に述べる掃気係数  $\mu_r$  はその流動抵抗を簡単化して表わすことができ、又、掃気シミュレーションなどに参考資料を提供し、マクロな考察が出来るという点で主要な係数であるなどの理由から調査の対象とした。

掃気係数はシリンドラ系を右図のごとく  $\mu_r f_s$  なる断面積を有する等価オリフィスに置きかえて考えた係数である。ここに  $f_s$  は掃気孔断面積とし、 $\mu_r$  はそのオリフィスの流量係数に相当するもので、系の諸抵抗を含ませた係数でこれを掃気係数と呼んでいる。右図においてシリンドラ系に相当する二つのオリフィスを流れる量と等価オリフィスを流れる流量とが等しいとすると、

$$Q_{ori} \text{ m}^3/\text{s} = \mu_r f_s \sqrt{\frac{2 g \Delta P}{r_s}} = \mu_s f_s \sqrt{\frac{2 g \Delta P_s}{r_s}}$$

$$= \mu_e f_e \sqrt{\frac{2 g \Delta P_e}{r_e}} \quad (1)$$

$$\Delta P = \Delta P_s + \Delta P_e \quad r_s = r_e \text{ より、}$$

$$\frac{1}{\mu_r^2} = \frac{1}{\mu_s^2} + \left( \frac{1}{\mu_e f_e^2} \right) \quad (2)$$

となる。

定常流模型実験において掃気係数  $\mu_r$  は(1式)によって求められ、かつ、(2式)の関係が成立つ。ここに、

$P_s$  : 掃気管の圧力 mmAq

$\Delta P_s$  : 掃気管とシリンドラ内との圧力差 mmAq

$P_0$  : 大気圧

$\Delta P_e$  : シリンドラ内と大気との圧力差 mmAq

$r_s$  : 掃気管内の比重 kg/m<sup>3</sup>

$\Delta P$  : 掃気管と大気との圧力差 mmAq

$r_e$  : 排気管内の比重 kg/m<sup>3</sup>

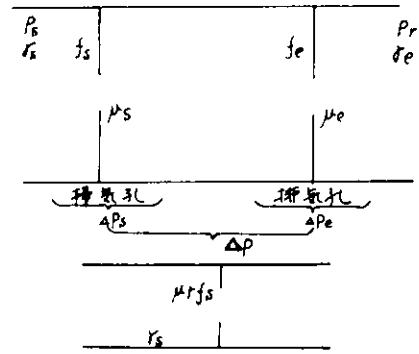
$f_s$  : 掃気孔 開口面積 m<sup>2</sup>

$Q_{ori}$  : 掃気管上流のオリフィス通過流量 m<sup>3</sup>/s

$f_e$  : 排気孔面積 m<sup>2</sup>

$\mu_s$  : 掃気孔の流量係数

$\mu_e$  : 排気孔の流量係数



実験は定常流実験装置（組立図及び配置図）を用い、定常流によって掃気期間を模擬して掃気孔の各開口度（ $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$ ）ごとにシリンダ系の掃気係数  $\mu_t$  を(1)式で求めた。

ここで掃気圧は図3.5に示す掃気管側壁にとりつけられた計測口よりマノメータで測定され、掃気圧は50, 100, 150, 200 mmAqについて行ない、掃気係数  $\mu_t$  に対する掃気圧力の影響を検討した。

ここにいう掃気孔の開口度とは図3.4に示すようにシリンダ円周上に並んだ8個のポートのうち、掃気入口側に近い6個のポートの高さは同一であり、41mmである。その高さを4等分して各開口度としており、開口面積は表3.1に示す通りである。

表3.1 掃 気 係 数

掃気孔 開口度	掃 気 圧 $P_s$ : mmAq G	掃気孔の各開 口時面積 $f_s$ $\times 10^{-4} \text{ m}^2$	総掃気流量 $Q_{ori}$ $\text{m}^3/\text{s}$	掃 気 係 数 $\mu_t$
$2/4$	50	105.34	0.164	0.556
	50	151.80	0.206	0.479
	50	196.74	0.228	0.406
$1/4$	100	58.88	0.163	0.689
	100	105.34	0.248	0.585
	100	151.80	0.289	0.476
	100	196.74	0.327	0.412
$3/4$	150	105.34	0.292	0.565
	150	151.80	0.358	0.484
	150	196.74	0.392	0.406
$4/4$	200	105.34	0.336	0.563
	200	151.80	0.401	0.485
	200	196.74	0.418	0.410
排気孔断面積				
$f_e : 166.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$				

掃気係数  $\mu_t$  について実験結果を図3.8に示す。横軸に掃排気孔開口面積比  $f_e/f_s$  をとり、掃気圧力をパラメータにとったものである。

掃気圧力により、掃気係数  $\mu_t$  に殆んど変化ないことを示しており、掃排気孔の開口面積  $f_e/f_s$  によって  $\mu_t$  は変化し、掃気孔全開時  $4/4$  で  $\mu_t$  は  $0.41$  度で最も低く、 $f_e/f_s$  と共に順次増加し、掃気孔  $1/4$  開時には  $0.69$  度程度上昇する。

掃気期間において掃気孔開口始めより掃気係数  $\mu_t$  は  $0.69$  ( $1/4$  開) より、 $0.41$  ( $4/4$  開) まで変化し、 $0.28$  度程度変化を示している。

掃気係数  $\mu_t$  は(2)式に示されるように  $f_e/f_s$ 、 $\mu_t$ 、 $\mu_e$  の関数で表わされ、上述の実験結果が示すように  $f_e/f_s$  によって変化することは明らかで、さらに掃気孔の開口度の変化  $f_e/f_s$  によって  $\mu_t$ 、 $\mu_e$  も変わると考えられ、求めたい値であるが、当実験の範囲においては明らかでない。また掃排気孔の流量係数  $\mu_s$ 、 $\mu_e$  は正確に計算することは難しいことである。なお、図3.8には(2)式によって  $\mu_e$ 、 $\mu_s = 1.0$ とした場合の掃気係数の変化の計算値をあわせて記入している。

なお、掃気圧  $100 \text{ mmAq}$  で行なった定常流実験でシリンダ系を流れた流量を  $260 \text{ mm}$  径のシリンダ断面積で割った値をシリンダ内平均流速  $v$  としてシリンダ径を代表径としたシリンダ内レイノルズ数  $Re$  を計算してみると、

掃気孔  $1/4$  開口時において  $4.628 \times 10^4$  、  $4/4$  開口時に  $1.068 \times 10^5$  程度となり、シリンダ内の流れはこの程度の乱流である。なお、本実験では、シリンダプロックの掃気管断面における流速分布を左右対称に一定とした場合の掃気係数  $\mu_r$  の変化を調査した。しかし上記の流速分布を変えると掃気孔開口度が小さいときに限り掃気係数  $\mu_r$  に若干の影響を与えることを経験しているので、これについては今後検討したいと考えている。

## 2.2.2 掃気孔の流量係数

模型に用いられたMAN型の機関において、掃排気孔は図3.4に示されるようにシリンダの円周上に掃気孔が8個並び、その上に排気孔が6個重ねて並んだポート配列をしてそれぞれのポート断面は矩形である。

定常流での本実験においては取扱いを簡単にするために、これらの掃排気孔群を掃気孔、排気孔をそれぞれ一つと考え、掃気孔の開口度の変化によって両孔の流量係数の変化を調査した。

このシリンダ系を略記すると下図のごとくであるが、この系を簡易化すると下図のように掃気管より順次断面積の変化した管路にノズル状のポートより流れが噴出している系と考えることができる。

この簡易化されたシリンダ系において掃気管圧  $P_s$  、シリンダ頂点の静圧  $P_m$  及び大気圧を計測し、それらの圧力差から流れが生ずるとし、掃気孔の開口度の変化によって両ポートの流量係数  $\mu_s$  、  $\mu_e$  の変化を求めた。ここに排気孔の開口面積は掃気期間中変わらないが、掃気孔の開口度と共に排気孔よりの流出に影響を与えるため排気孔の流量係数に変化をもたらすものと考えられる。

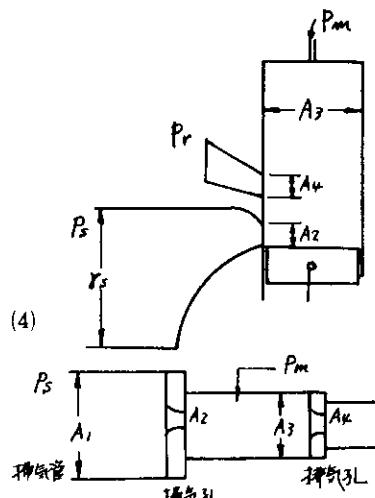
ここにいう流量係数とは、それらのポートの開口展開断面積を代表面積として、圧力差とポート通過流量とかく求めたものである。

掃気孔の流量係数  $\mu_s$  は次式で与えられる。

$$\mu_s = \frac{G_{ori}}{\epsilon_1 A_2 \sqrt{\frac{2g(P_s - P_m) r_s}{\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^2}}} \quad (3)$$

$$\epsilon_1 = \sqrt{\frac{\left(\frac{k}{k-1}\right) \left(\frac{P_m}{P_s}\right)^{2/k} \left[1 - \left(\frac{P_m}{P_s}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{P_m}{P_s}\right)\right] \left[1 - \left(\frac{P_m}{P_s}\right)^{2/k} \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}} \quad (4)$$

記号その他表3.2参照



本実験において掃気圧は  $100 \text{ mmAqG}$  として排気側は大気とした。

表3.2 掫気孔の開口度の変化による掃排気孔の流量係数の変化及び掃気係数

掃気孔 開口度	掃気孔の各開 口時の面積 $A_2$ ( $\text{m}^2$ )	掃 気 圧 $P_s$ $\text{mmAqG}$	シリンダ頂点 の静圧 $P_m$ $\text{mmAq}$	掃気孔の 流量係数 $\mu_s$	排気孔の 流量係数 $\mu_e$	掃気係数 $\mu_r$
$1/4$	0.00588	100	28	0.796	0.490	0.690
$2/4$	0.01053	100	58	0.920	0.470	0.581
$3/4$	0.01518	100	68~72	0.886	0.507	0.469
$4/4$	0.01967	100	76	0.888	0.556	0.410
掃気管断面積 $A_1 : 0.12375 (\text{m}^2)$						
シリンダ断面積 $A_3 : 0.05309 "$						
排気孔面積 $A_4 : 0.01660 "$						
$P_T$ : 排気側圧力 (大気圧)						

結果は表3.2及び図3.9に示す。

実験結果によると掃気孔の流量係数 $\mu_s$ は掃気孔開口1/4で0.796、2/4開口時に最大値0.920を示し、4/4開口時に再び低下するのに対して、排気孔の流量係数は逆に掃気孔2/4開口時に最低となり、4/4開口時に最大となっている。

特に掃気孔2/4開口時には掃気孔の流量係数は最も高く、かつ排気孔の流量係数は最も低い値を示し、これらの流量係数の値を比較して他の開口時とは異なった流入、流出をしていることを示し、従って、シリンダ内の流れもバーンも他の開口時と比較して異なるであろうと思われる。

なお、掃気係数は掃気孔開口時より次第に低下し、4/4開口時に最も小さく、シリンダ系の流れ抵抗が最も大きいことを示す。

### 2.2.3 掃気期間中のシリンダ内圧力変化について実機例と定常流実験との対比

実機において掃気開始時期までにシリンダ内圧力はほぼ排気圧程度に下っており、続いて掃気流入が始まるが、排気脈動やピストンの動的影響を受け、流入によるシリンダ内圧力の変化など複雑である。しかし定常流実験による掃気孔の各開口度ごとにシリンダ頂点 $P_m$ の圧力変化をとてみると実機例のシリンダ内圧力変化とよく対応していることがわかる。

図3.10は掃気期間の圧力変化について実機例と定常流模型実験とを対比して示したものである。定常流実験によると掃気係数の項で示したように、シリンダ系の流れ抵抗は $\mu_s$ 、 $\mu_e$ 及び $f_e/f_s$ の変化により変わり、特に掃排気孔面積比 $f_e/f_s$ が小さい時シリンダ内流入が増加し、シリンダ内圧力 $P_m$ を上昇させる。

そのように掃排気孔の開口度 $f_e/f_s$ がシリンダ内圧力 $P_m$ を変えつつ、ガス交換を行なっていることがわかる。

実機においても、排気脈動などに影響されるが、大略は同様な傾向で掃気作用が行なわれているようである。

このことから定常流実験による結果を利用して、かつ若干の仮定をすることにより、一サイクル流入掃気量を近似的にシミュレートし、掃気流入の傾向を知ることができるとと思われる。

仮定1) 定常流実験で得られた掃気孔の流量係数 $\mu_s$ 及び掃気孔開口変化によるシリンダ内圧力状態の変化は実機の場合にも適用可。

2) 掃排気の圧力差は実機同様0.25 atmとして流れに圧縮性を無視する。

3) ピストン速度及び排気脈動の影響は無視

シリンダ系において定常流で掃気している場合、シリンダに流入掃気量 $V_s$ と流出排気量 $V_e$ とはシリンダ内状態で等しいとする。

$$V_s = \mu_s f_s \epsilon \sqrt{\frac{2g(P_s - P_m)}{r_s}} (t_2 - t_1) \quad (5) \quad \text{ここに、} r_m : \text{シリンダ内状態の比重量}$$

$$V_e = \mu_e f_e \frac{r_m}{r_r} \epsilon \sqrt{\frac{2g(P_m - P_r)}{r_m}} (t_2 - t_1) \quad (6) \quad t_2 - t_1 : \text{掃気時間 Sec}$$

$dQ$  : 掃気時間のクランク角

$$V_s \equiv V_e \quad \frac{P_s - P_m}{P_m - P_r} = \left[ \frac{\mu_e f_e}{\mu_s f_s} \right]^2 \left[ \frac{r_m r_s}{r_r^2} \right] = \zeta \quad (7) \quad n : \text{機関の回転数 rpm}$$

$T_s$  : 掃気管内温度 °K

一サイクルの掃気量は

$$G_s \frac{\text{kg}}{\text{Cycle}} = r_s V_s = \mu_s \frac{P_s}{\sqrt{T_s}} \times \frac{1}{6n} \sqrt{\frac{2g}{R}} \left[ 1 - \frac{1}{1+\zeta} \left( 1 + \zeta \frac{P_r}{P_s} \right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_s d\theta \right] \quad (8)$$

計算の結果は表 3.3 に示す。これによると掃気開始より掃気孔  $1/2$  開口時までの全掃気量の 10% 程度の流れが生ずるにすぎないが、その流入状態は実機の計測例をみても判るように複雑である。

ここで計算には、この  $1/2$  模型機関をそのまま実機として模擬した。原型機関に合わせるために単位行程、体積当りの時間面積を合わせ、回転数を実機の 2 倍 410 rpm とした。

また掃気期間は 16 区間に分け、各区間での流れ状態の変化に合わせて計算した。

表 3.3

掃気孔開口度	掃気孔開口期間 クランク角 ( $4\theta^\circ$ )	掃気孔開口面積 $f_s$ ( $m^2$ )	掃気孔の流量係数 $\mu_s$	$\zeta$ 値	流入掃気の流量 $G_s$ ( $Kg$ )
$1/4$	2.7	$3.565 \times 10^{-4}$	0.796	3.35	$0.740 \times 10^{-3}$
	2.7	$5.888 \times 10^{-4}$	0.796	3.35	$1.222 \times 10^{-3}$
$2/4$	3.0	$8.211 \times 10^{-4}$	0.920	0.72	$1.616 \times 10^{-3}$
	3.4	$1.0534 \times 10^{-4}$	0.920	0.72	$2.350 \times 10^{-3}$
$3/4$	3.7	$1.2857 \times 10^{-4}$	0.886	0.43	$2.556 \times 10^{-3}$
	4.5	$1.5180 \times 10^{-4}$	0.886	0.43	$3.671 \times 10^{-3}$
$4/4$	5.9	$1.7503 \times 10^{-4}$	0.868	0.32	$4.833 \times 10^{-3}$
	14.1	$1.9674 \times 10^{-4}$	0.868	0.32	$12.983 \times 10^{-3}$

一サイクル掃気量  $G_{s\text{ tot}}$  :  $0.060 \text{ Kg/cycle}$  (給気比 2.05)

シリンダ容積  $24\ell$  : 大気状態で占めるシリンダ内空気の重量  
 $0.0293 \text{ Kg}$     $\tau$  :  $1.22 \text{ Kg/m}^3$   $20^\circ\text{C}$   $1 \text{ atm}$

## 2.2.4 掃気孔開口度の変化によるシリンダ内 Flow Pattern の変化

掃気孔の各開口度 ( $1/4$   $2/4$   $3/4$   $4/4$ ) の変化によるシリンダ内 Flow Pattern を調査した。図 3.1 の装置を用い、掃気圧は  $100 \text{ mmAqG}$  一定にして定常流で実験した。掃気は、MAN 型機関の場合、掃気孔の反対側の壁に沿って掃気を吹き上げ、シリンダヘッドに当たり反転し、掃排気側の壁に沿って下る流れ Pattern を示していることから模型機関内の流れ調査において、流れの流路に沿った圧力分布という意味からシリンダ軸方向の圧力分布を標準ピトー管で計測した。計測に当っては図 3.11 の縦断面に示すようにシリンダヘッドの直径方向に中心より 5 個の測定孔を設け、ピトー管を軸方向下向きに挿入し、そのシリンダヘッドをシリンダライナとの間に回転スライドさせ、シリンダの一断面について 6~8 個所測定し、図 3.11 に示す 11 シリンダの断面について計測し、図に示したのが図 3.11 ~ 3.16 である。図中における数字は水柱 mm の単位で計測値そのままの値である。

図 3.11 は掃気孔  $4/4$  開口度の場合でシリンダ内圧力は掃気圧に比べてかなり高く、シリンダ断面 sec 5、6 にみられるようにシリンダ軸方向の高圧帯は反掃気孔入口側に位置し、掃排孔側の圧力は低い。また、断面全域に亘って軸方向圧力は高く分布する。

このシリンダ内流れは相当に複雑であるので、綿糸による流れの観察を行ない写真撮影した。図 3.17 a) はその写真例である。

図 3.17 a) の写真はシリンダ上部(アクリル製、sec 8 ~ 10 附近)であり、シリンダ内に見える左側の鉄棒が反対側シリンダ壁である。

掃気開口度  $4/4$  の場合、写真から判断すると掃気流は反対側壁に沿って吹き上げ、図 3.11 断面図をそのまま上からみて、流れはいく分右廻りに旋回流を生じながら、シリンダヘッドに当り、掃排気孔の側壁に沿って下り排出する。

図 3.11 の sec 5 には掃気噴流中心線上、壁より 35 mm の点を測定点 A ( 掃気流がシリンダ内で軸方向圧力成分として安定する断面の高い圧力帯の一点 ) として、その点の流速方向を測定し併記している。この点の流れはかなり左上向きで、反掃気入口側壁に向い、流速は  $8.7 \text{ m/s}$  程度で遅いが、反掃気入口側のほぼシリンダの半断面にわたって、上昇流を生じている。

次に掃気孔開口度  $2/4$  の場合、一般にはピストンが下死点より上ると掃気噴流は上向きとなる。そのため、掃気は図 3.13 に示すように反掃気入口側のみに集まることなく、掃排孔附近まで掃気流が上昇し、掃気噴流は分散される。

写真図 3.17 b) は同様に左側が掃気流入中心で右側が反対の壁附近で流れる様子を示しているが、 $4/4$  開口時にみられる反対側壁に沿った掃気流は消え、同写真にみられるようにシリンダ上部においては、右廻りの水平な旋回流をなし、またシリンダ中央部には下向きの流れがみられる。

図 3.13 sec 5 の A 点の流れは  $16.3 \text{ m/s}$  と  $4/4$  開口時より早くなる。

掃気孔開口度  $1/4$  の場合、図 3.15 sec 4 ~ 5 にみられるように軸方向圧力の高い部分はシリンダ断面の中心から反掃気入口側壁側のごく一部に集まり、断面内でのシリンダ軸方向圧力差は大きくなる。

図 3.15 sec 5 に示すように A 点 ( 特に壁より 35 mm 点を軸方向圧力の高い部分に移動し、40 mm 点を測定点とした ) の流れは掃気流入中心にはほぼ沿って水平面より  $48^\circ$  の角度で壁に向って  $24 \text{ m/s}$  の流速で比較的早い流れとなっている。A 点の流れについて考えてみると、掃気孔開口度が小さい場合、この点とこの点の流れ方向から下流側、すなわちシリンダ頂点との圧力差が大きくなるために、A 点のように局所的に流れの早い場ができ、高速な流路を局部的に作るようである。

## 2.2.5 Jante の方法とシリンダ内 Flow Pattern

機関や掃排孔配列の異なる機関で、掃気の良否を判定する方法の一つに Jante の方法がある。この方法はシリンダヘッドを取り除き、ピト管をシリンダ頂点附近の断面をトラバースして軸方向の掃気の流速を計り、その Pattern によって掃気の良否を調べようとするものである。

- a) 掃排気孔と反対側のシリンダ壁に沿った安定した上昇流が存在すること。
- b) この場所で掃気流速度が最大であること。
- c) 速度零ラインが掃排気側と反掃排気側とが対称になるようにシリンダ直径近くを通る。

ここでは、この Jante の方法を用いて掃気孔の開口度の変化によって掃気の Pattern がどのように変わるかを調査した。

図 3.18 は Jante の方法による計測時の写真である。

図 3.19 は掃気孔  $4/4$  、及び  $2/4$  開の場合の実験結果で、掃気圧は  $100 \text{ mmAq}$  定常流で行なった。

掃気孔  $4/4$  開時には、反掃気入口側壁より中心部に高速度帶を作り、掃気流入方向と直角なシリンダ直径線に沿ってほぼ  $5 \text{ m/s}$  の等速度線が走っている。

$2/4$  開時には比較的高い  $10 \text{ m/s}$  等速度線が掃排気側まで廻り込んでシリンダ全域に亘って掃気流が分散している。しかも中央部に低い等速度帶が存在する。この両者の Pattern の相違は 2.2.4 のシリンダ flow pattern の変化の項で述べた傾向と一致する。

この Jante の方法による実験時に同時に掃気孔からシリンダ内への噴流状態を調査した結果が図 3.20 である。

掃気孔4/4開口時には2/4時よりも同じ掃気圧 $P_s$  100mmAq Gを与えても掃気孔中心附近のポート3、4、5、6では噴流速度が早く、反対に1、2、7、8ポートでは低くなる。そして2/4時には4/4よりも噴流が各孔共中心に向う傾向がある。

このように掃気開口度の変化によって掃気の噴流分布が変わり、シリンダ内流れは $4/4$ 開口時にみられるようにシリンダ壁に沿って流れる反転流から、 $2/4$ 開口時にはシリンダ中心部にスワールを作る流れに変わる。そのスワールの向きは掃気管から掃気孔までの流れの不均衡によるようである。

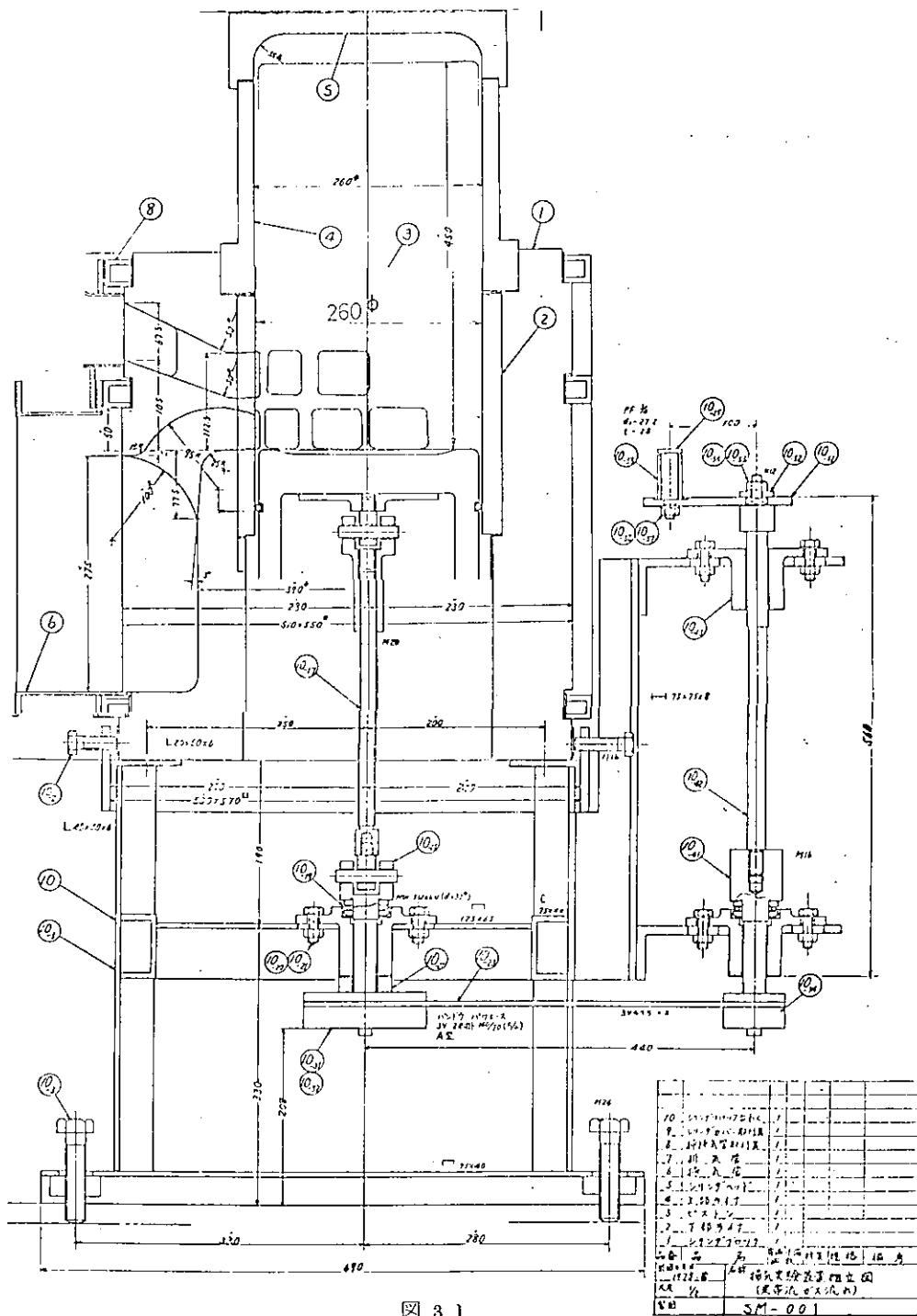


图 3.1

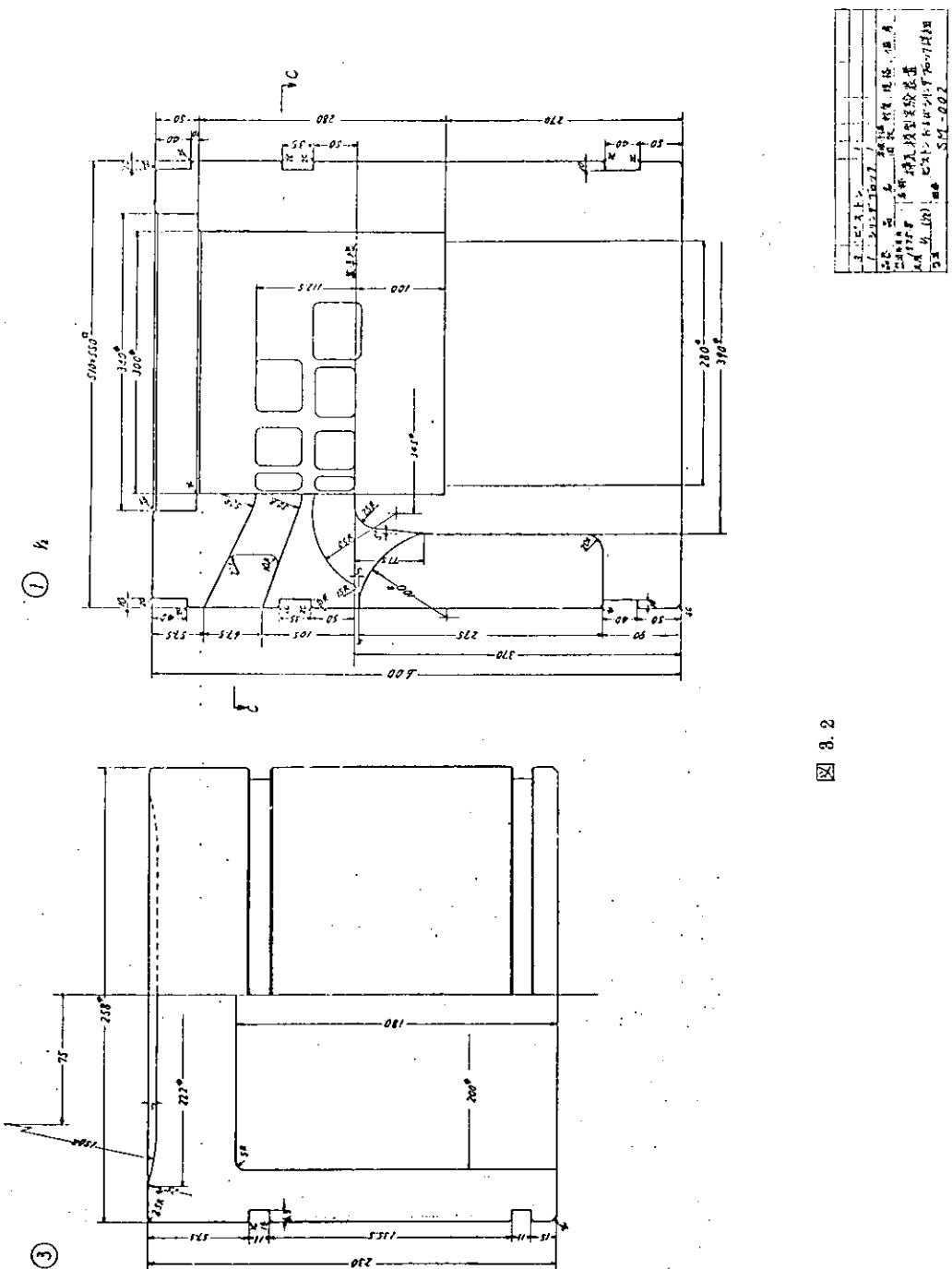
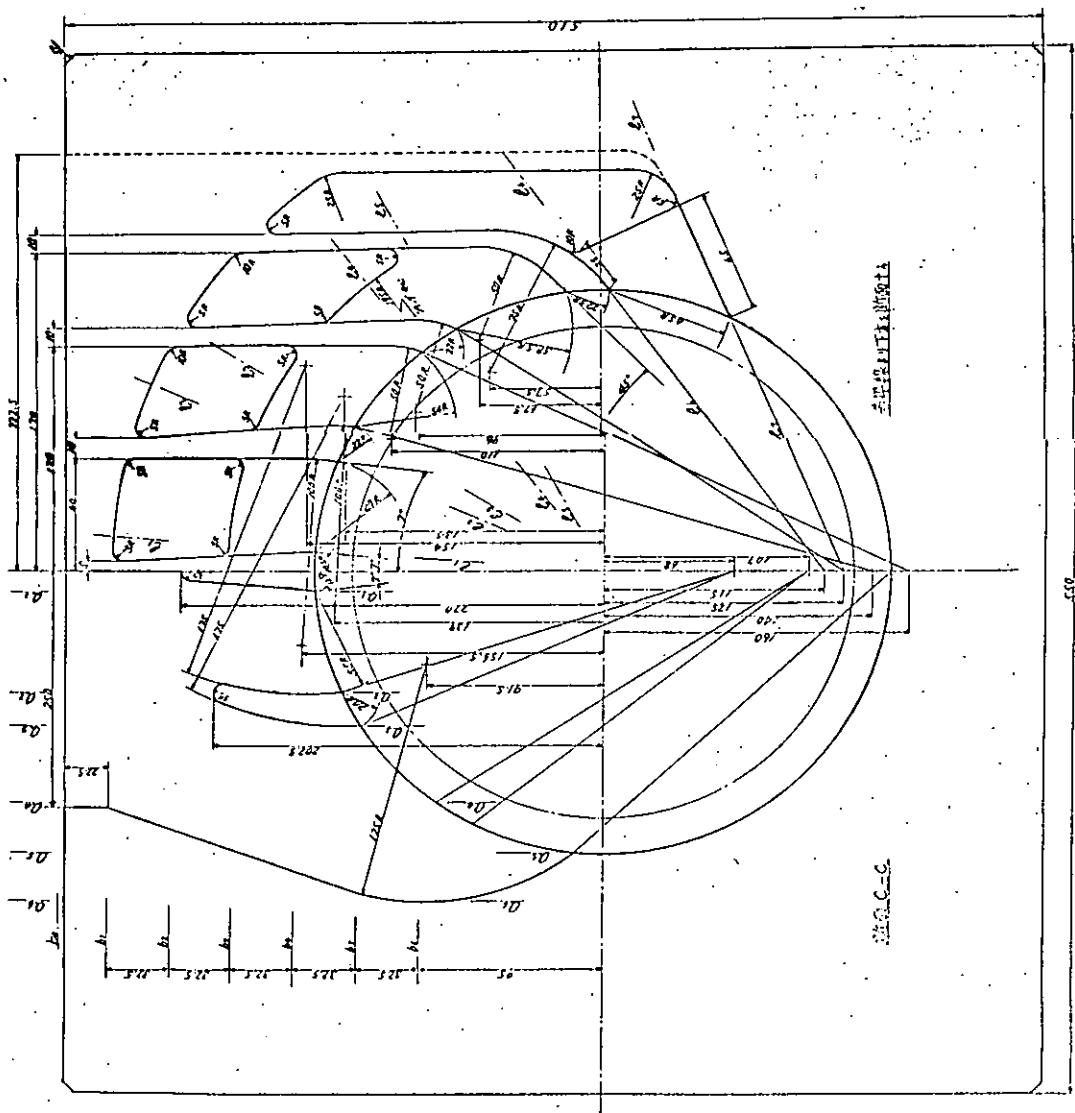
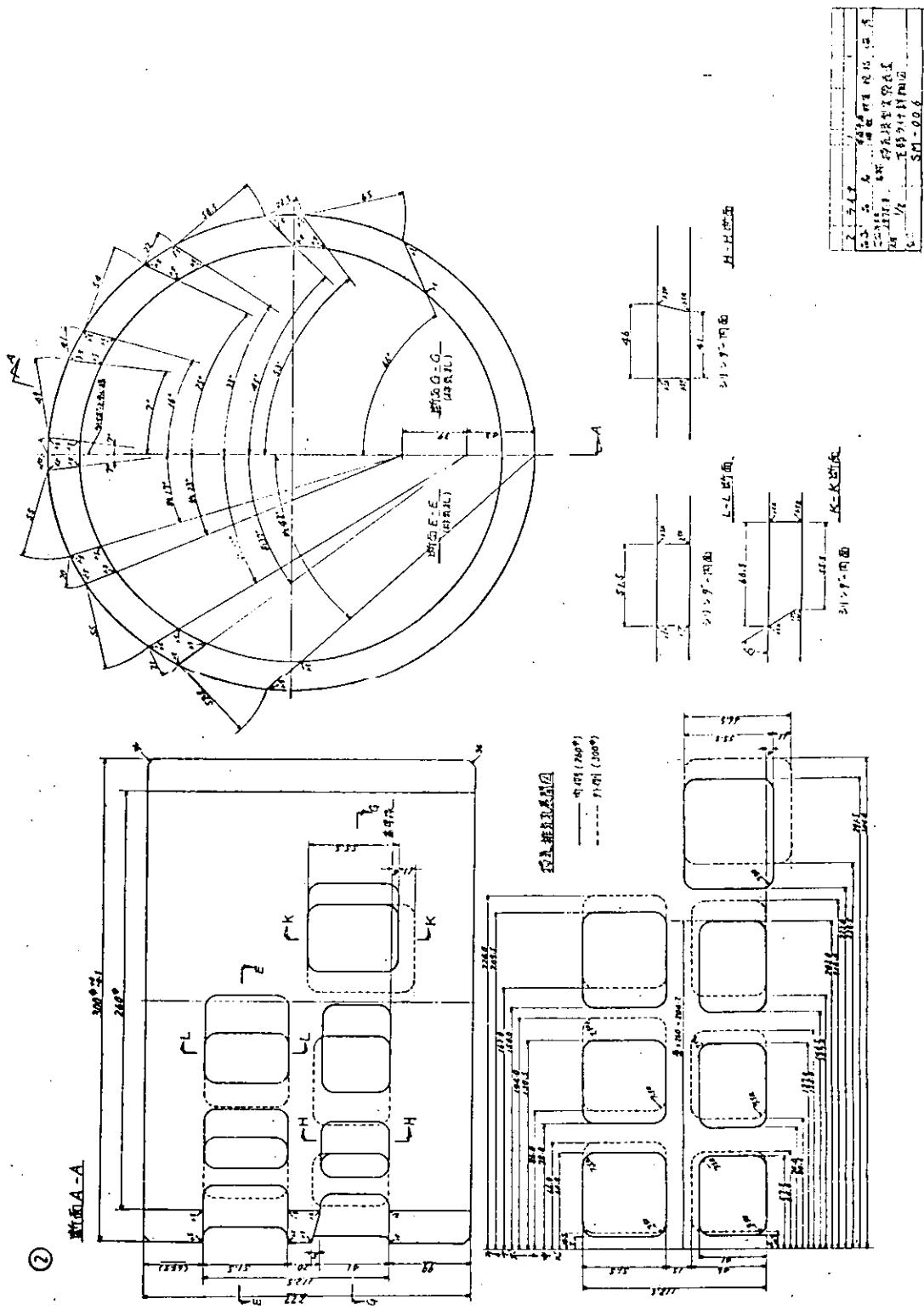


图 3.2



3.3



3.4

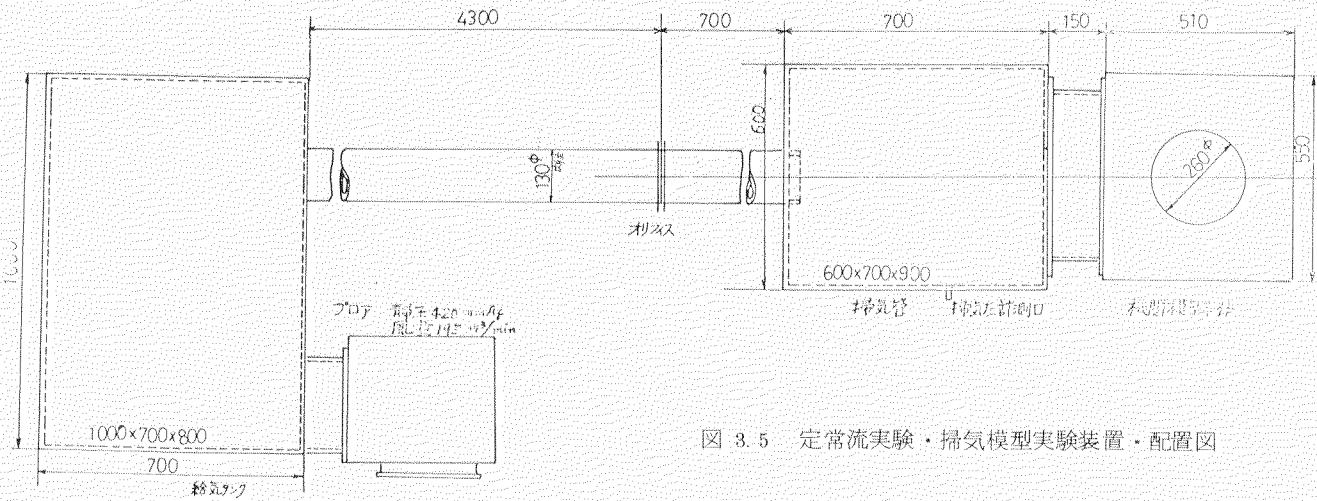


図 3.5 定常流実験・掃気模型実験装置・配置図

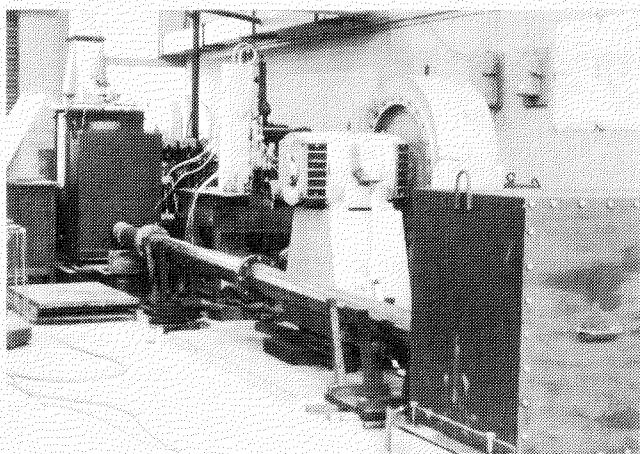


図 3.6 定常流 260φ 掃気実験装置の全体の配置

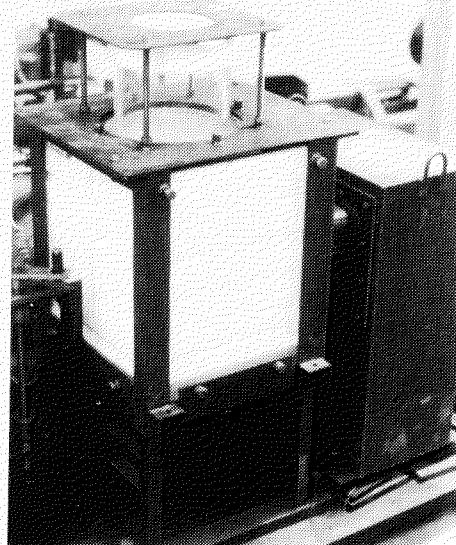


図 3.7 模型本体の組立・写真

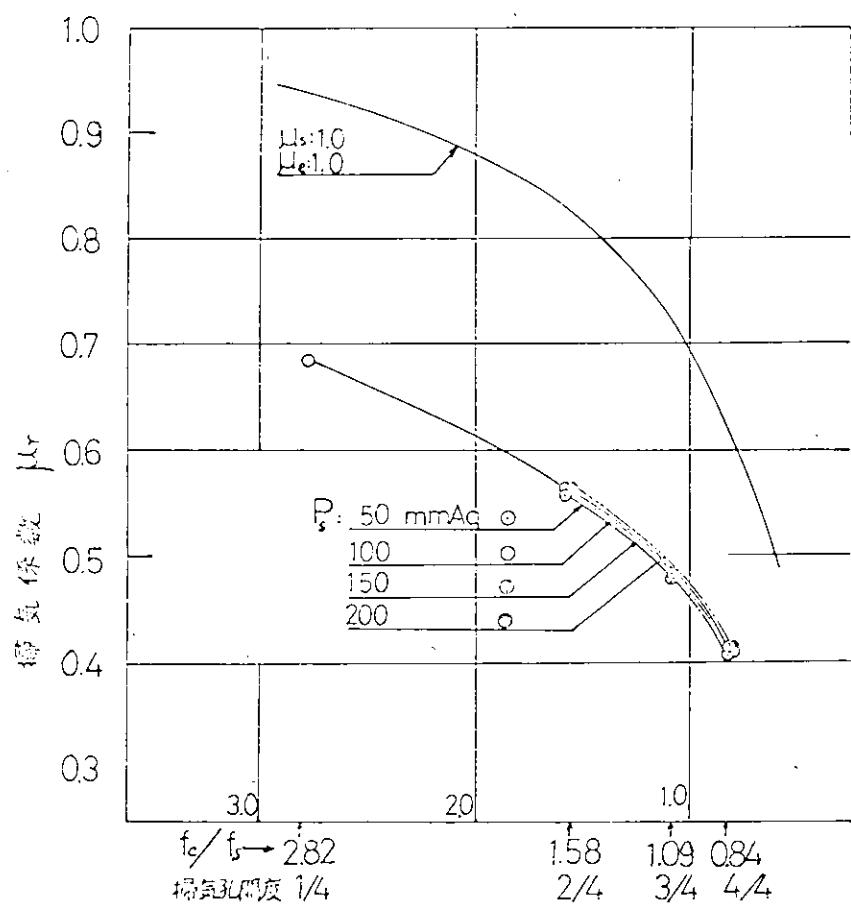


図 3.8 掃氣係数と掃排氣孔面積比  $f_e/f_s$  との関係

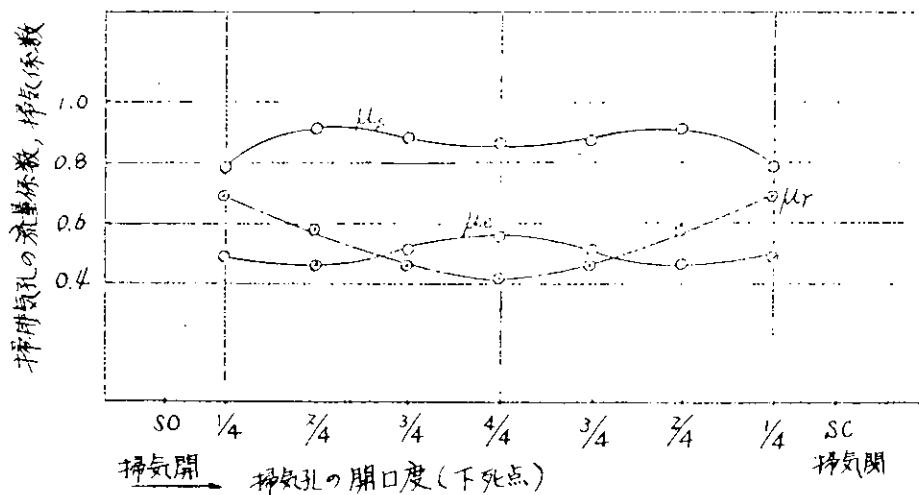


図 3.9

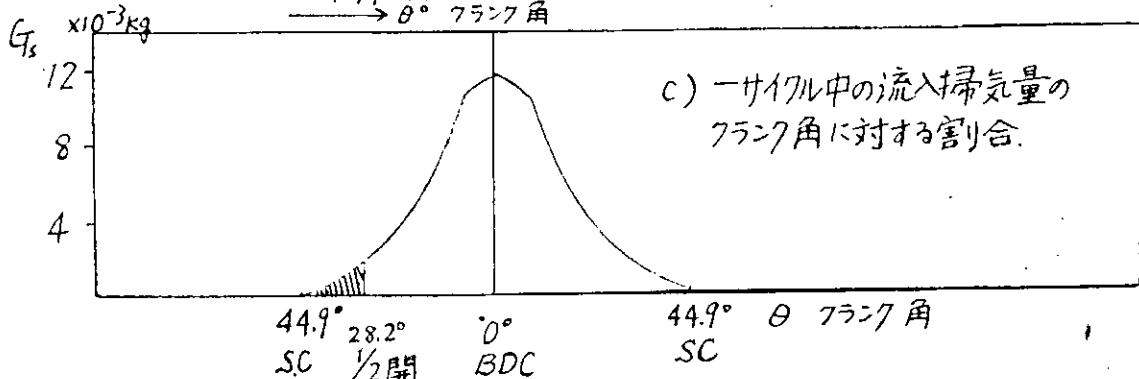
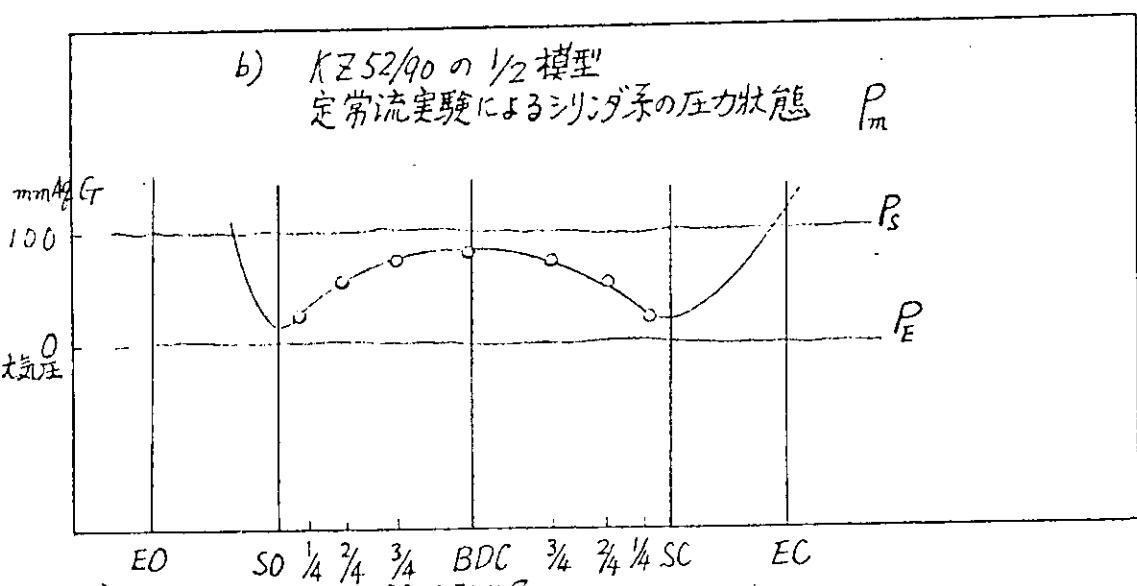
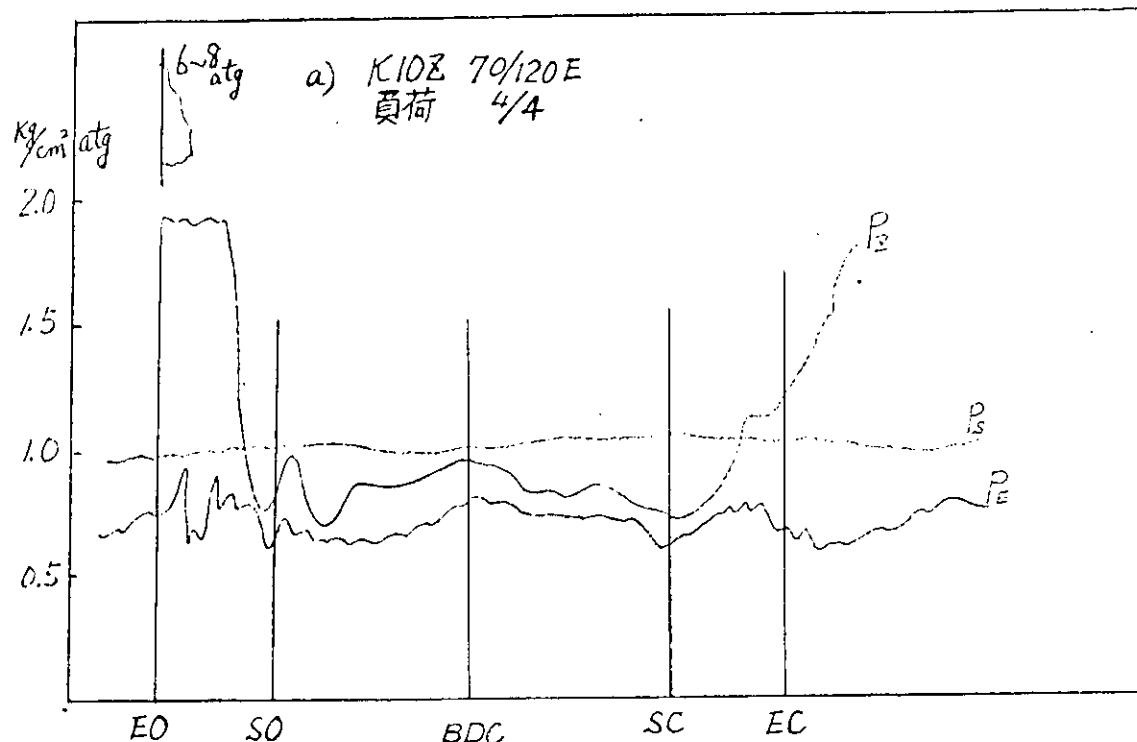


図 3.10 掃気機関におけるシリンダ内圧力変化について実機例と定常流実験との対比

Flow Patterns in the Cylinder in case of Steady Flow.

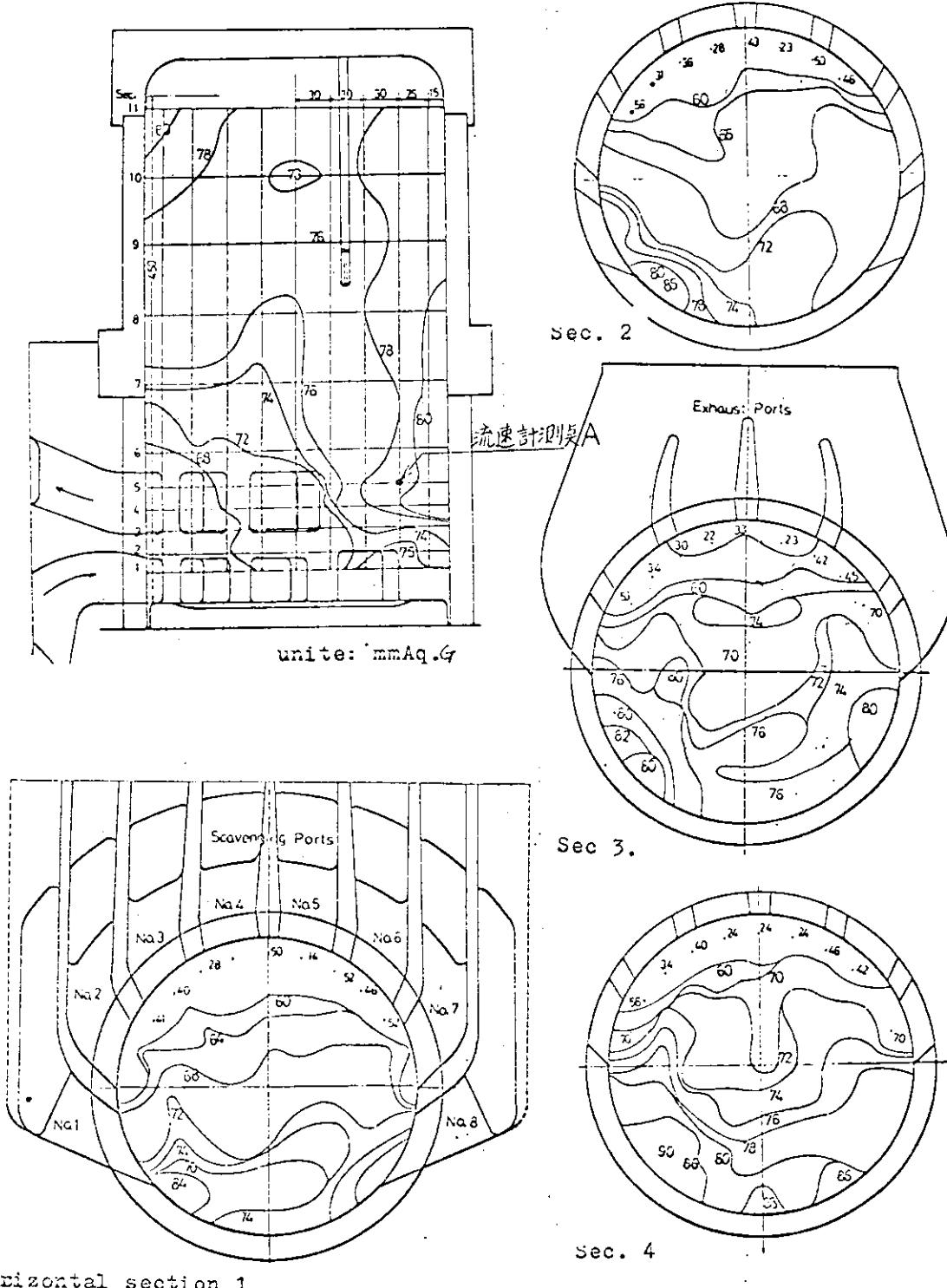
The steady flow half-model (D:260 mm. H:450 mm)

scavenging pressure: 100 mmAq.

scavenging port : full open.

In these pictures a number of figures show pressure distribution in the direction of cylinder axis.

\* Proto type: Kawasaki-MAN 52/90, two-stroke Diesel engine.



horizontal section 1

図 3.11

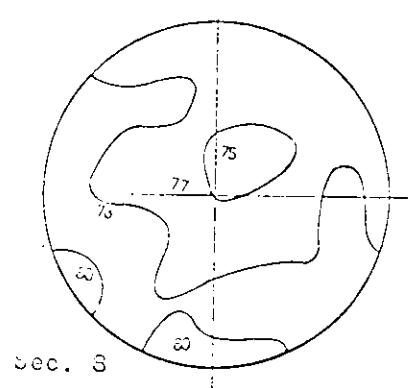
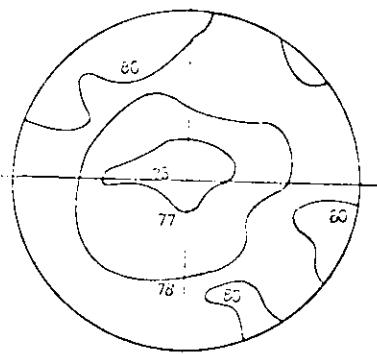
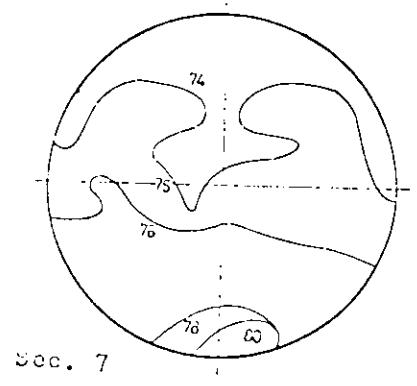
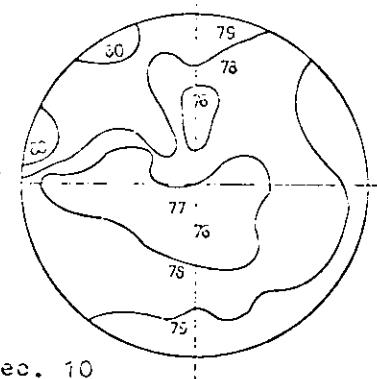
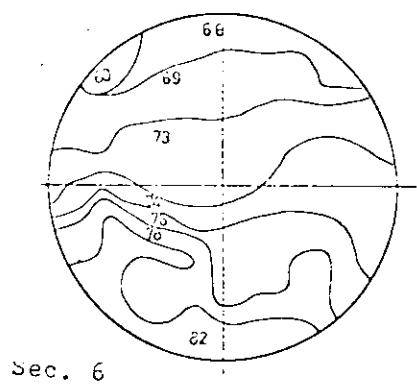
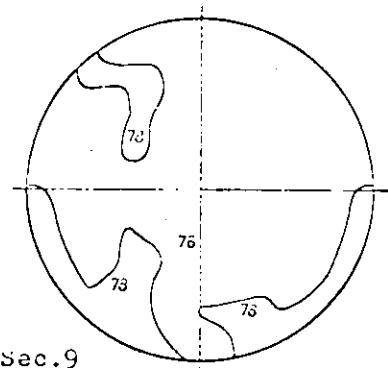
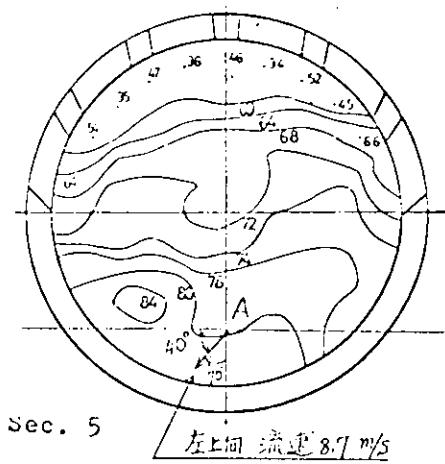


図 3.12

flow Patterns in the cylinder in case of Steady flow.

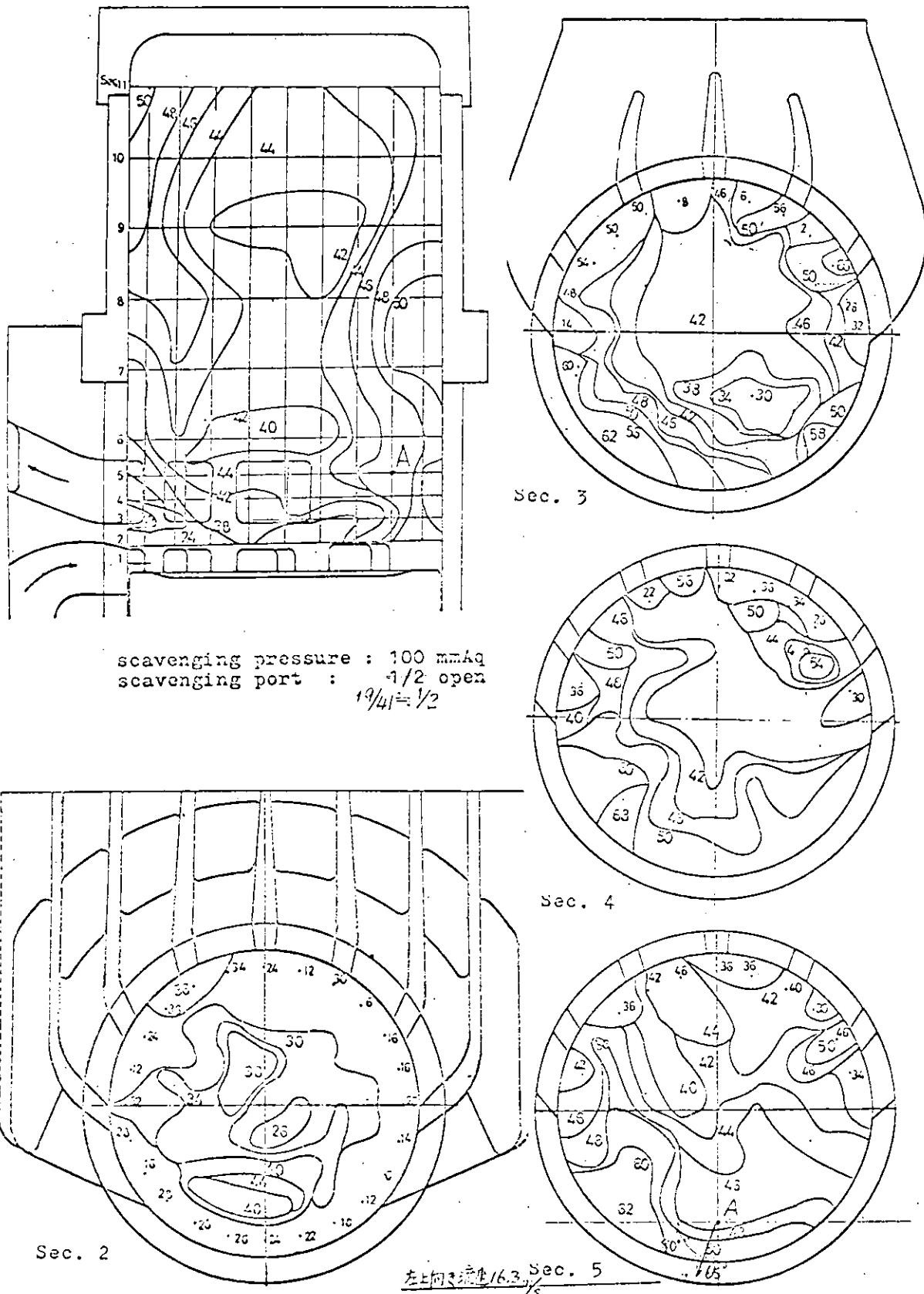
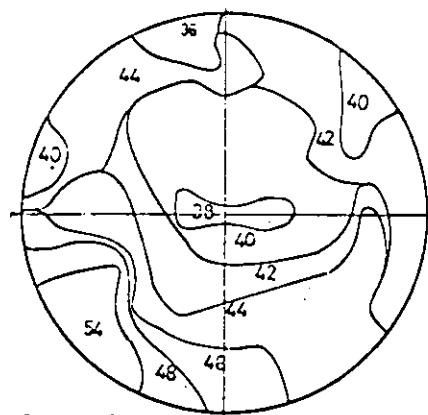
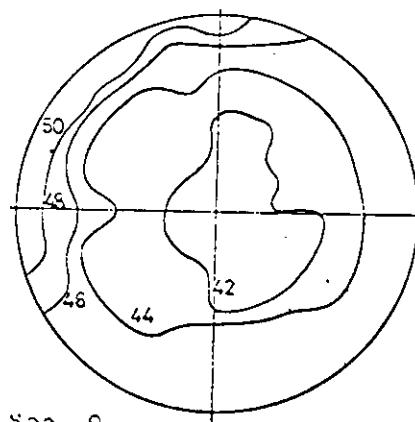


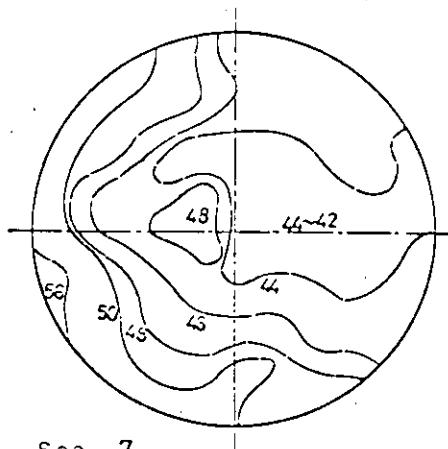
図 3.13



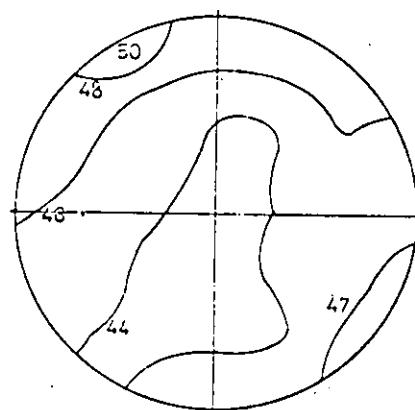
Sec. 6



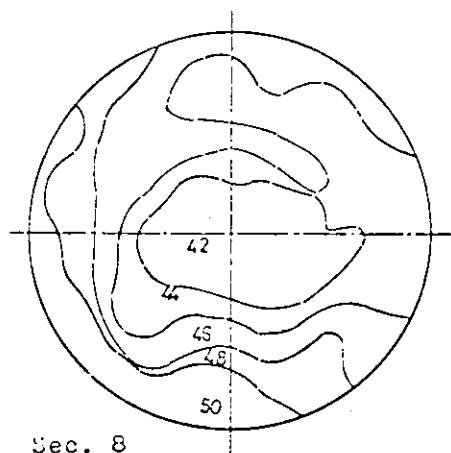
Sec. 9



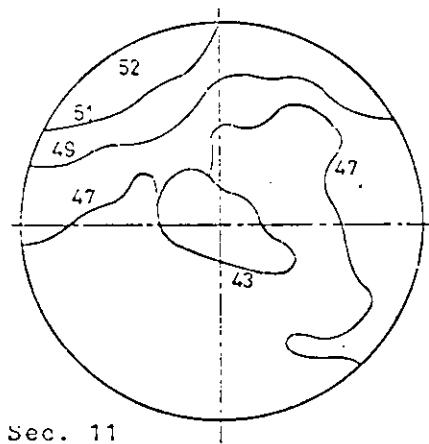
Sec. 7



Sec. 10



Sec. 8



Sec. 11

図 3.14

Flow Patterns in the Cylinder in case of Steady Flow

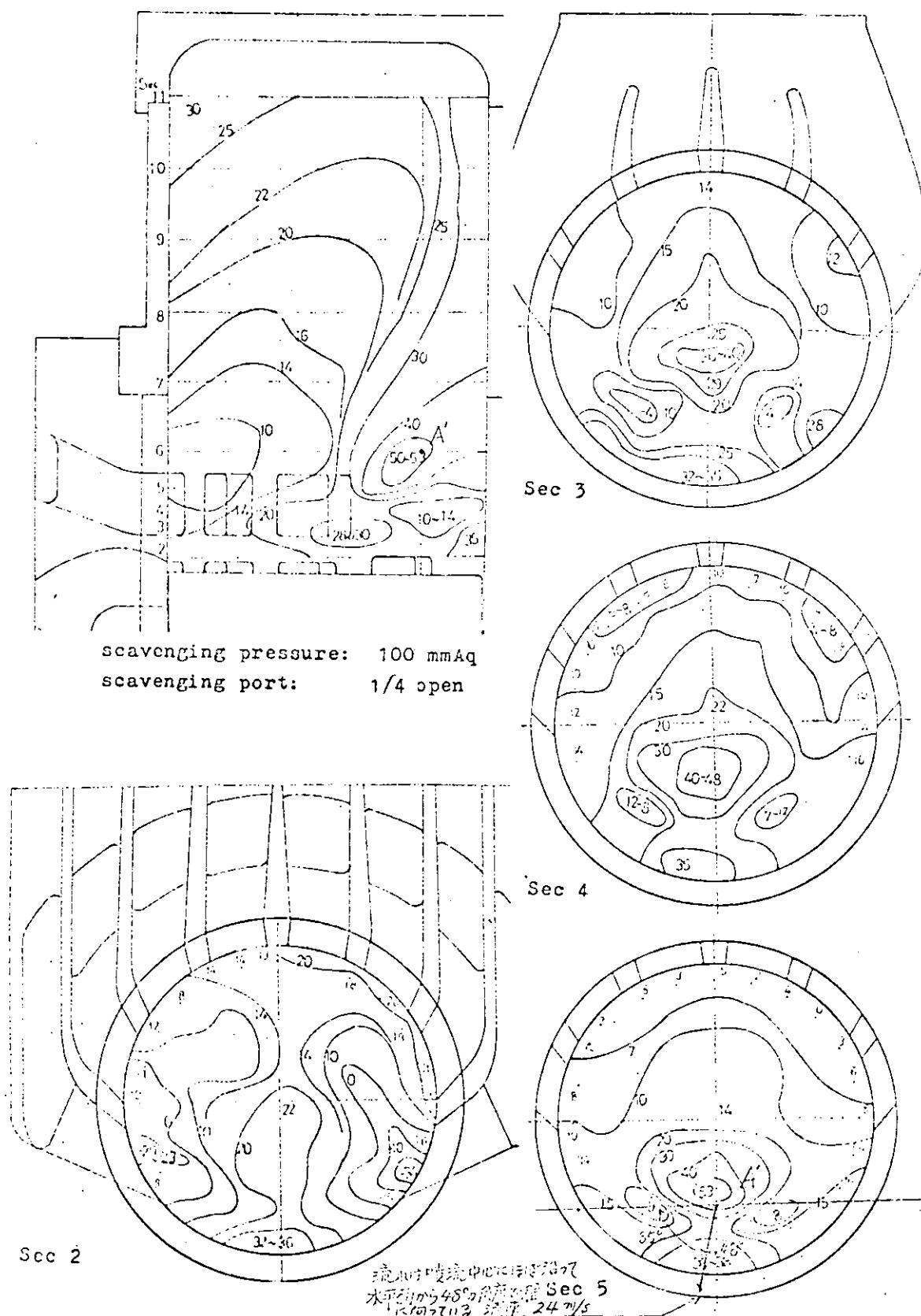
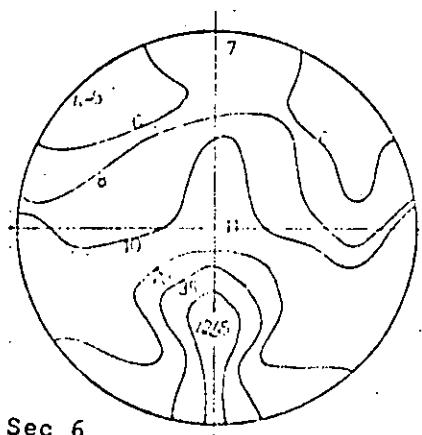
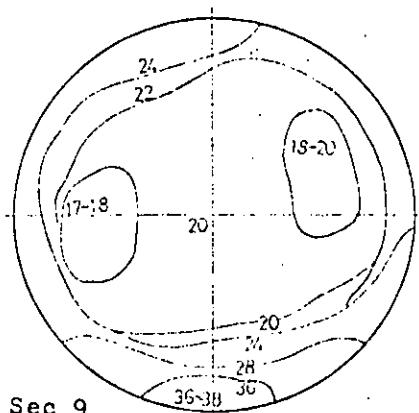


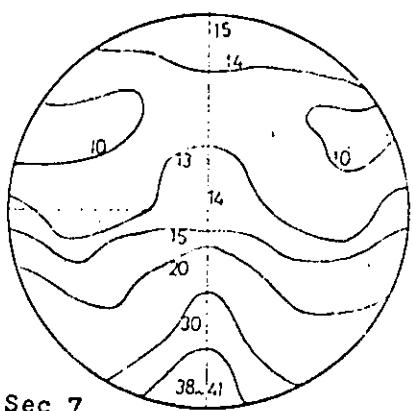
図 3.15



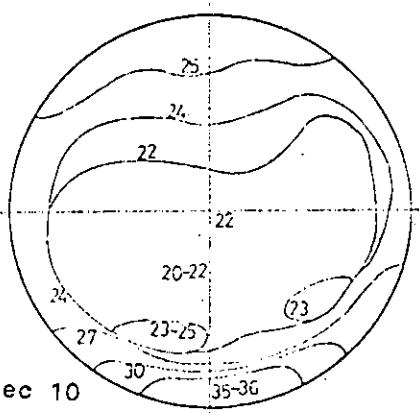
Sec 6



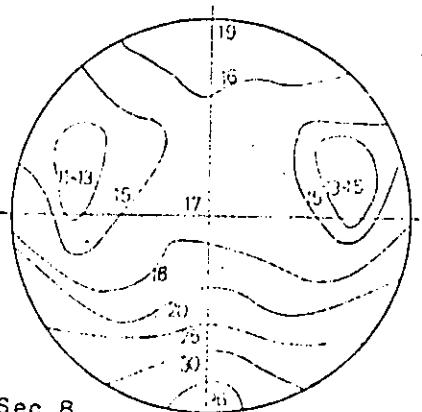
Sec 9



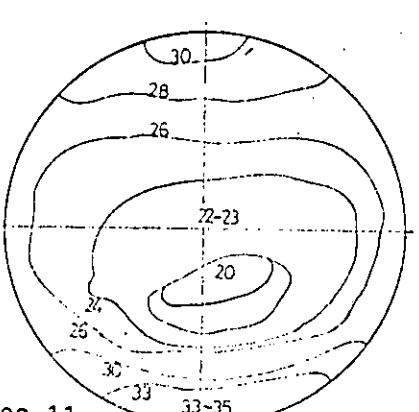
Sec 7



Sec 10

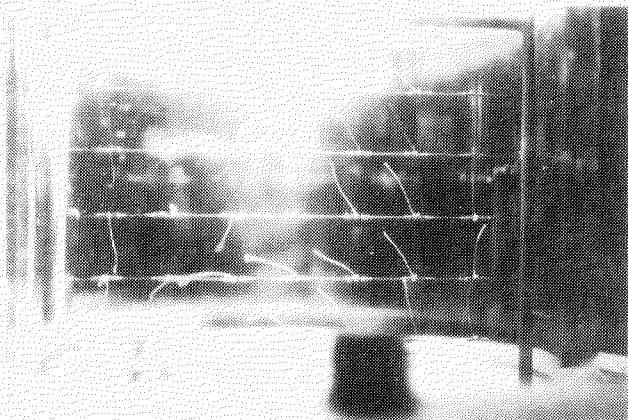


Sec 8

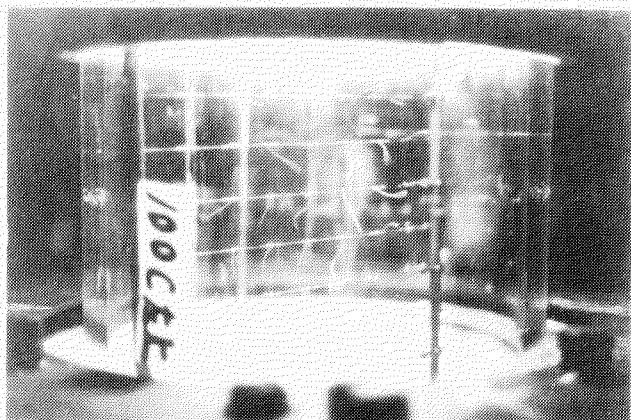


Sec 11

图 3.16



a) 掃気孔開口度 4/4 Ps : 100 mmAqG



b) 掃気孔開口度 2/4 Ps : 100 mmAqG

図 3.17 シリンダ上部 (sec 8~10附近)における  
シリンダ内流れ方向実験  
写真で左側にみえる鉄棒附近が掃気入口側の中心

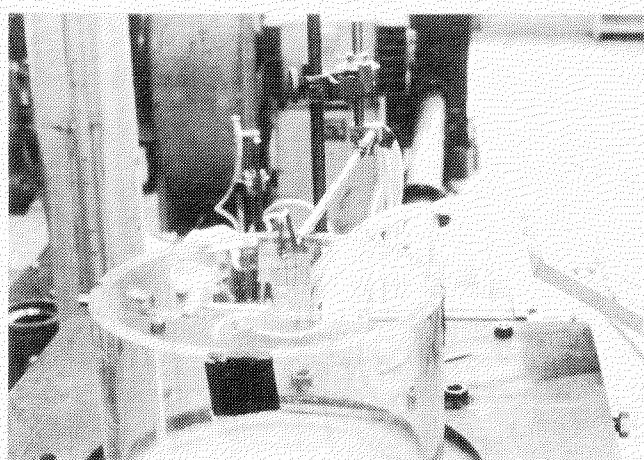


図 3.18 Jante の方法によるシリンダ軸方向流速の測定

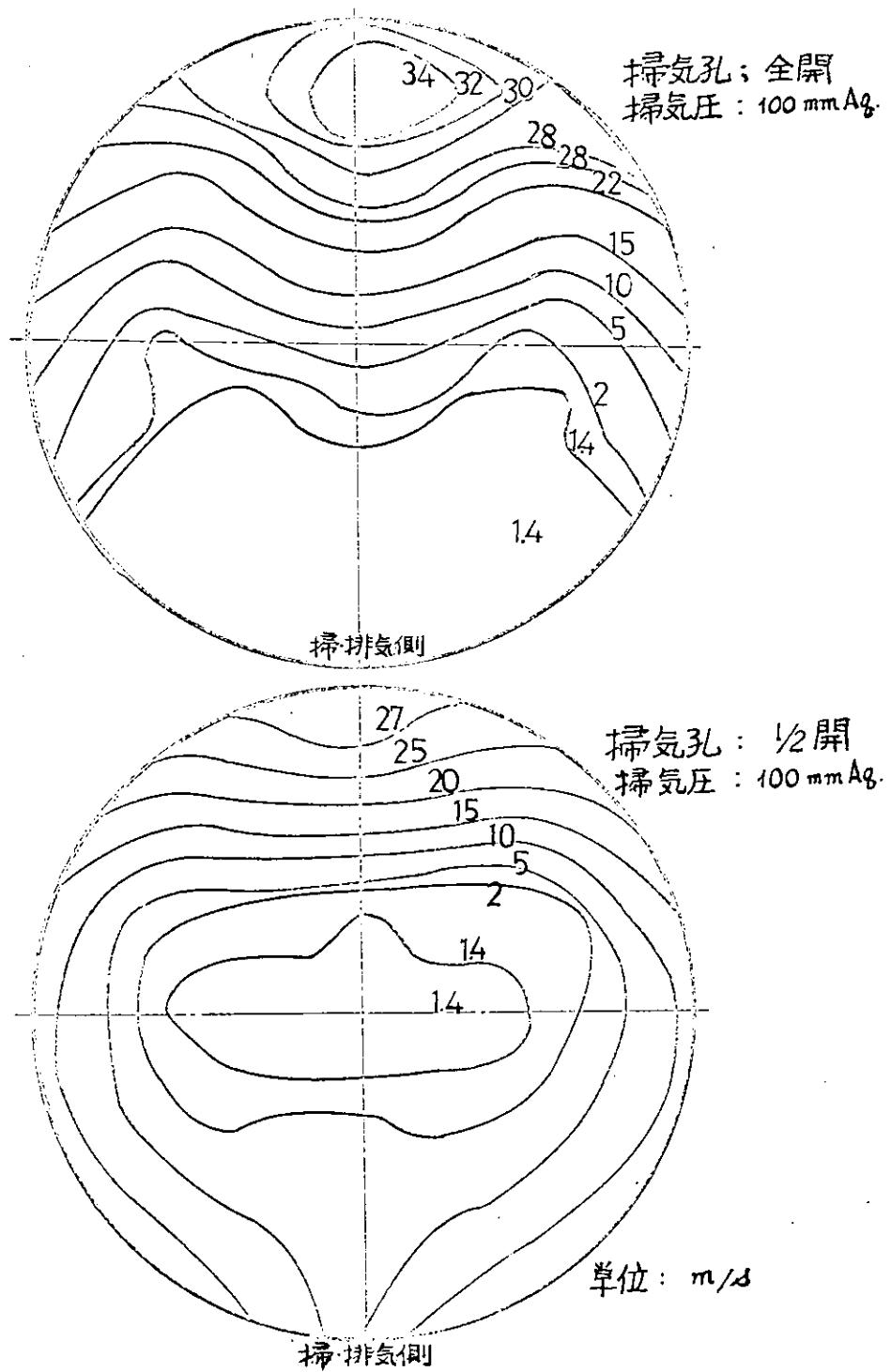


図 3.19 シリンダ頂点における軸方向等速度線

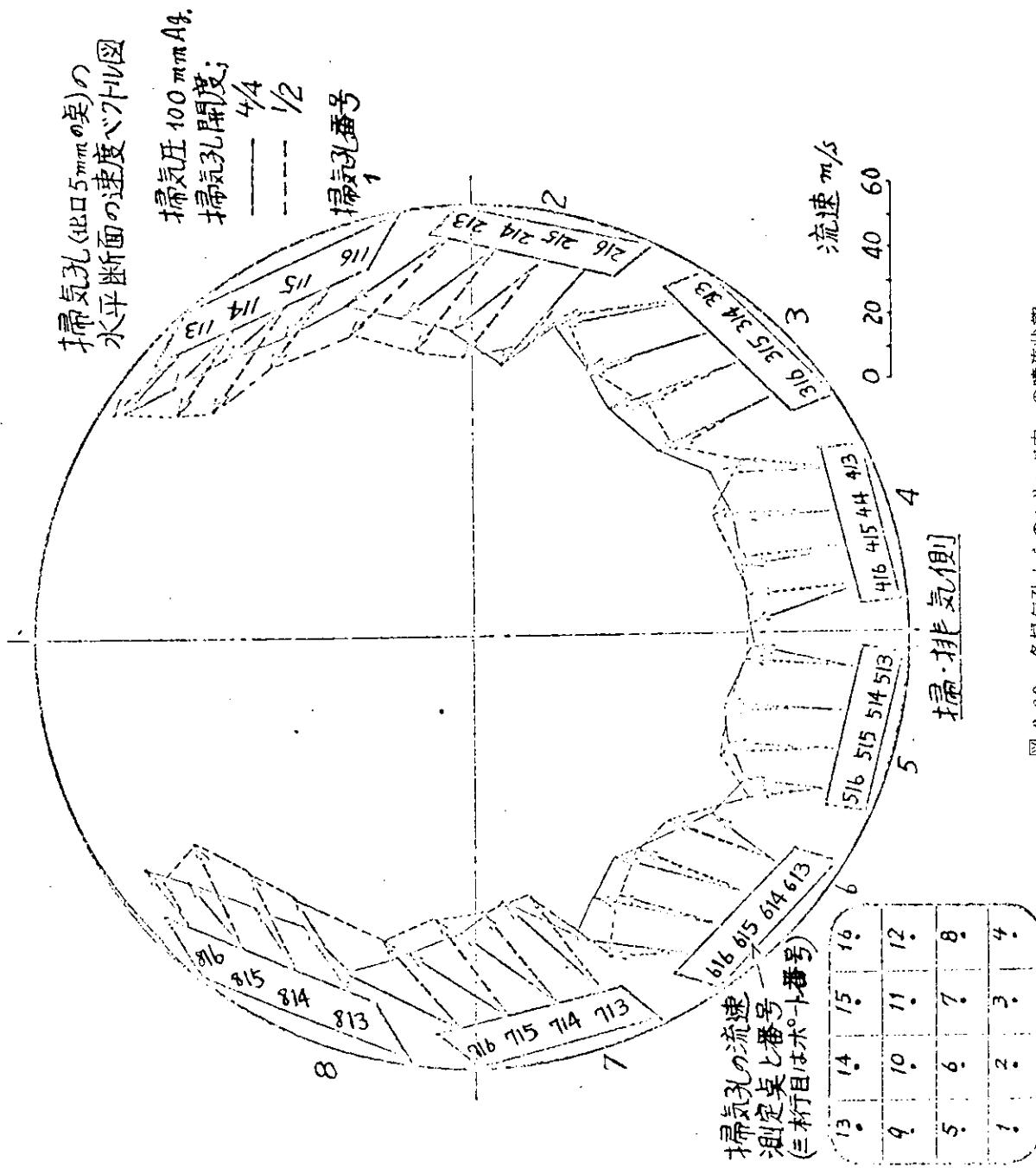


図 3.20 各掃気孔からのシリンドラ内への噴流状態

### 3. 一サイクル非定常実験装置（1/4動模型）の設計製図

#### 3.1 1/4動模型（シリンダ径130φ）の設計

ここに研究の対象とする中形二サイクル機関は実際に実験室内で必要なデータを得ることもできなく、たとえ組立工場で試験運転時にデータを得ることができるようにしてもそのデータは限られている。このような時、実機での一つの問題を解決するため模型実験によるのであるが、一般には模型が実機の本質的現象を再現するために幾何学的相似のみならず、ガスの流れなど運動学的、熱的な現象もすべて相似にすればよいとされている。しかし、模型装置でそれぞれの現象をカバーするには経費共大きな計画を必要とする。

そこで、できるだけ簡単な装置で限られた模型によって実験を行なうことになる。しかし実機のデータとを比較できない場合が多い。この場合、実機との比較において、大きさの異なる二つ以上の模型を作り、両者の模型実験結果が互いに相似であると確認することによって模型によるデータが実機との関連において役立つものとなる。

このような考え方から原型機関52/90E（シリンダ径520φ）に対して大きさの異なる二つの模型（1/2模型1/4模型）を準備する。一つは今年度製作した幾何学的相似な1/2静模型（シリンダ径260φ）で他の一つは、ここに計画予定している1/4動模型（シリンダ径130φ）である。

両模型によって定常流でのガス流れの比較、相関、そして1/4動模型によって静的な流れ調査と動的な流れ調査を行ない、比較を行なう。

以上の手順によって1/4動模型による実験データを相い補い、確かなものとして役立てる。ここに製作予定の一サイクル非定常実験装置はピストンを排気孔開口寸前に停止し、希望する圧力、温度のシリンダガスを充填し、電磁駆動により瞬時に一サイクルを行なわせしめ、掃気期間における掃排気のガス流れを調査しようとするものである。

具体的には、この1/4動模型によって、排気温度指度に関する研究の必要性が挙げられているので、これに影響を及ぼす主な要因、すなわち掃気期間の排気孔附近のガスの流れ、温度変動、掃気の短絡の調査などを行なうことと計画している。

#### 3.2 一サイクル非定常実験装置

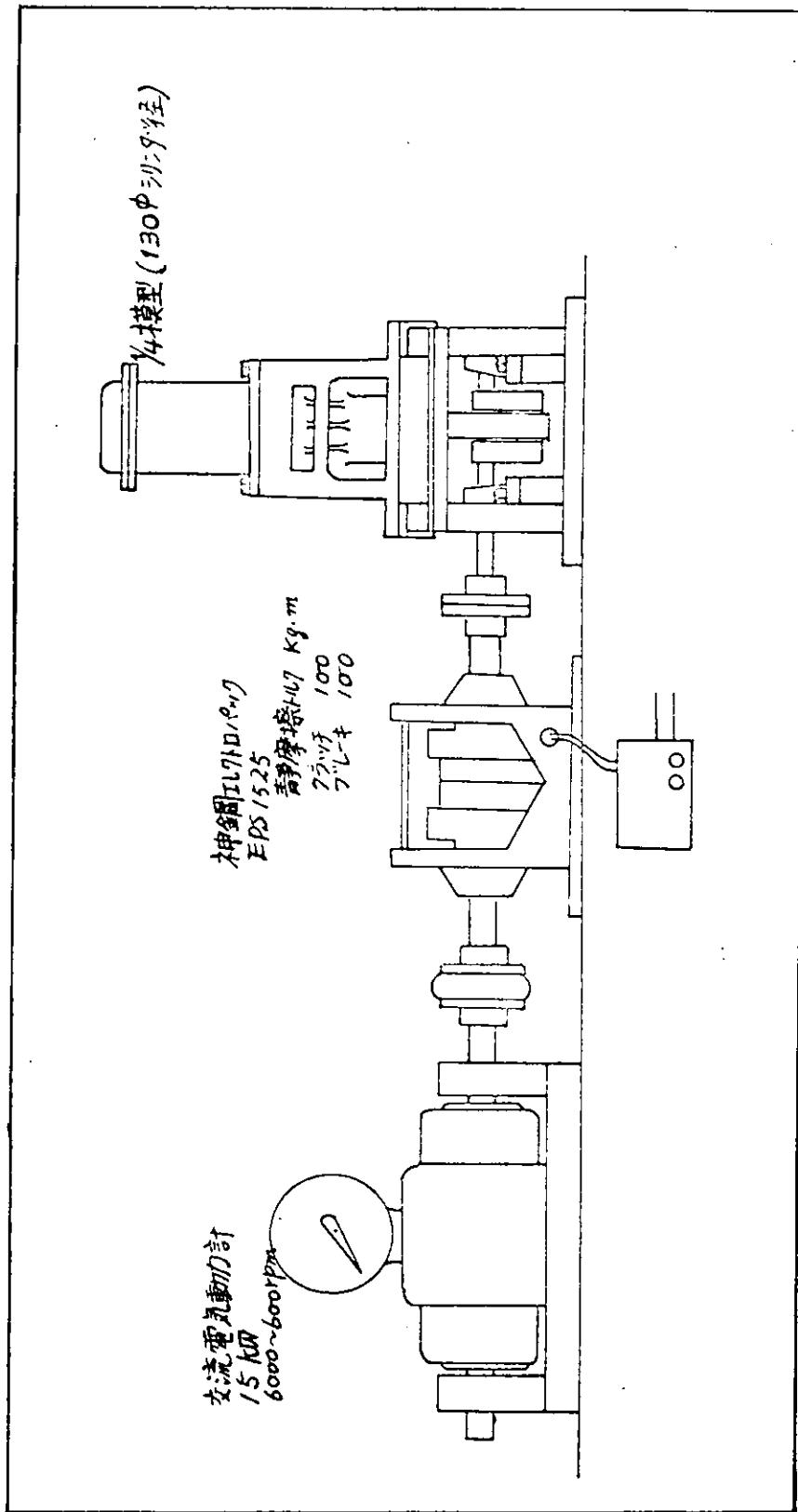
一サイクル非定常実験装置の製作後、他の実験装置と組合せ設置される予定の略図は図3.21のごとくである。模型装置の組立図及び主要部品図は、図3.22～3.27を参照。

### 4. ま と め

定常流模型装置によって定常流の掃気期間の流れを模擬し、シリンダ系の流れ抵抗（掃気係数）、シリンダ内Flow Pattern、流量係数、Janteの方法による流れ調査などの実験を行った結果、掃気孔の開口度変化によって、シリンダ系を流れるFlow Patternが変わるために、掃気係数、ポートの流量係数に変化を与え、各開口度によって、それぞれ特異な流れ方を示しているようである。

以上によって、シリンダ内のガス流れ、シリンダ系の流れなどを調査し、概略のFlow Patternを定常流実験によって知ることができた。しかし細部に亘って具体的に局部の流速などがはっきりしていない点もあるので、特に今後もひき続き排気温度指示の問題に関連し、排気ポート附近に注目して調査を行う予定である。

図 3.21 一サクル非定常流実験装置



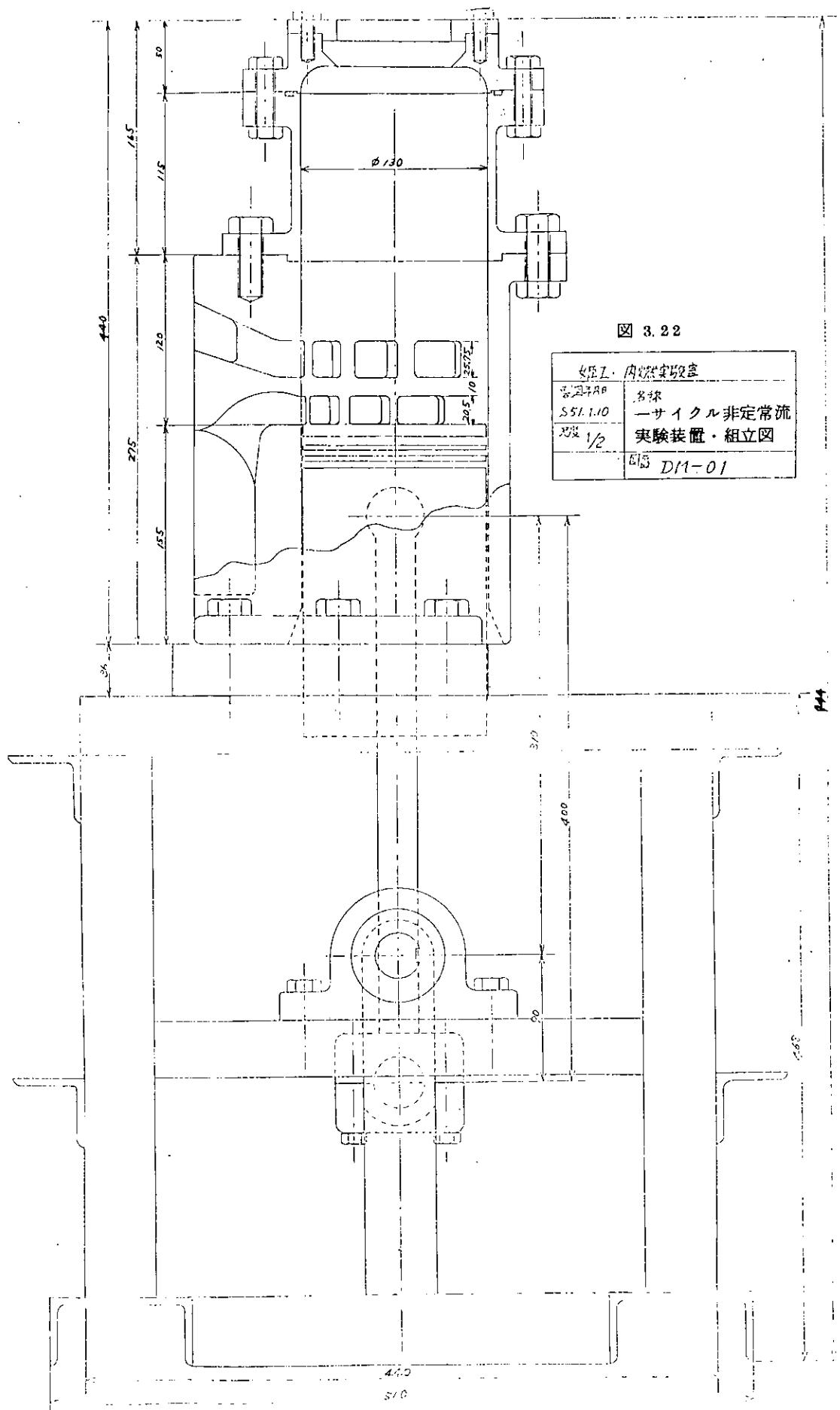


図 3.22

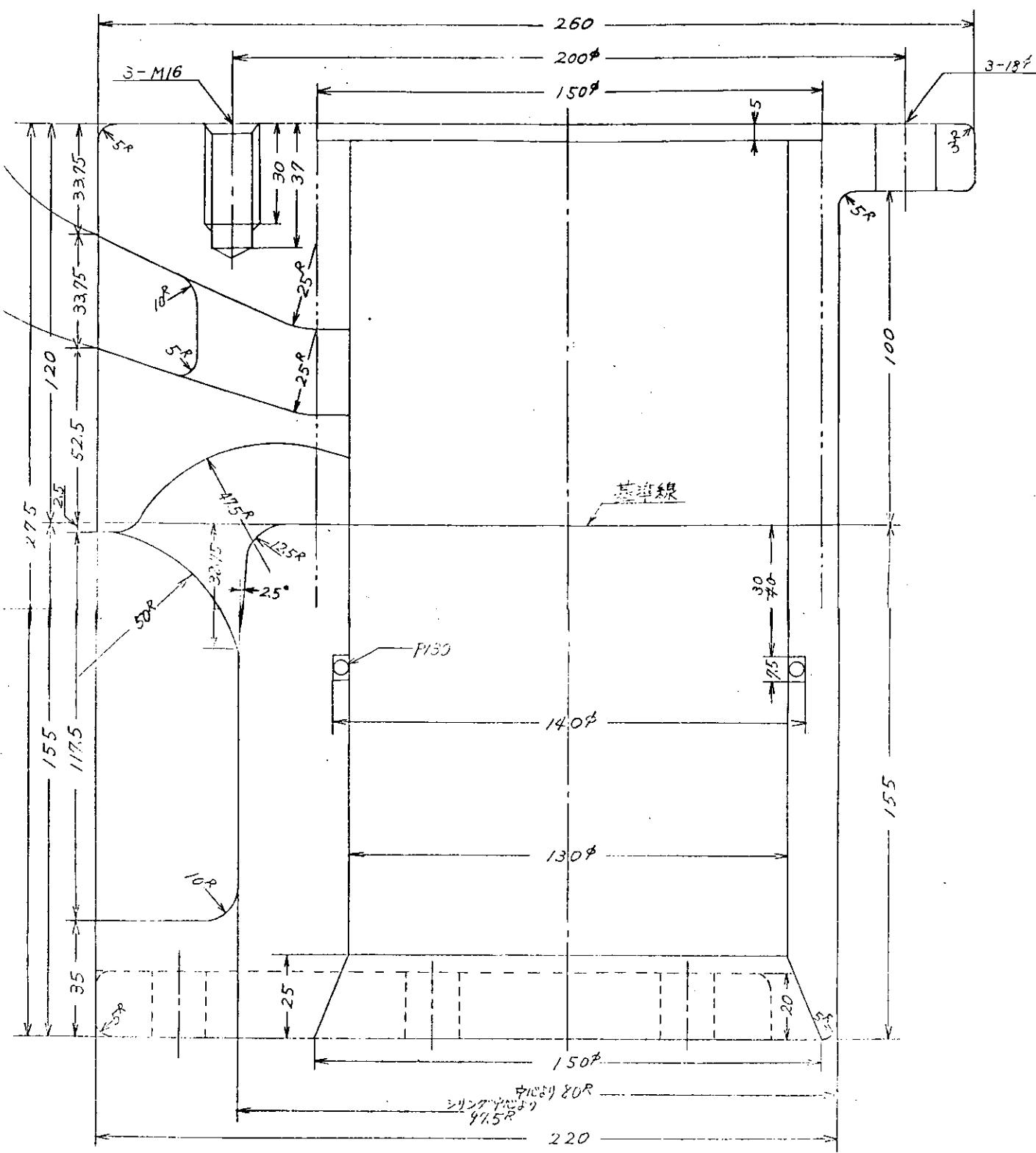
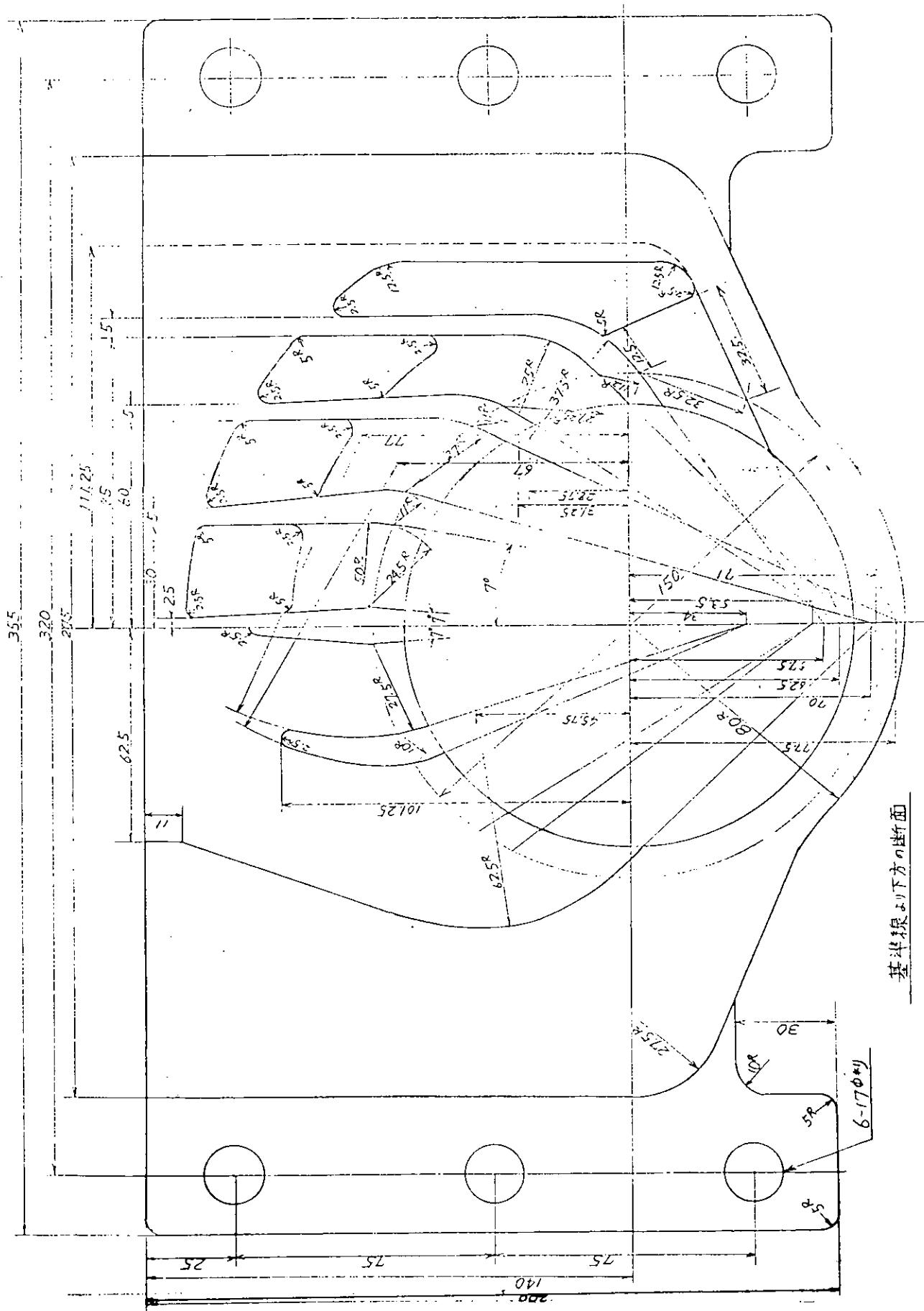


図 3.2.3 一サイクル非定常実験装置・シリンドラブロック側面



基準線より下方の断面

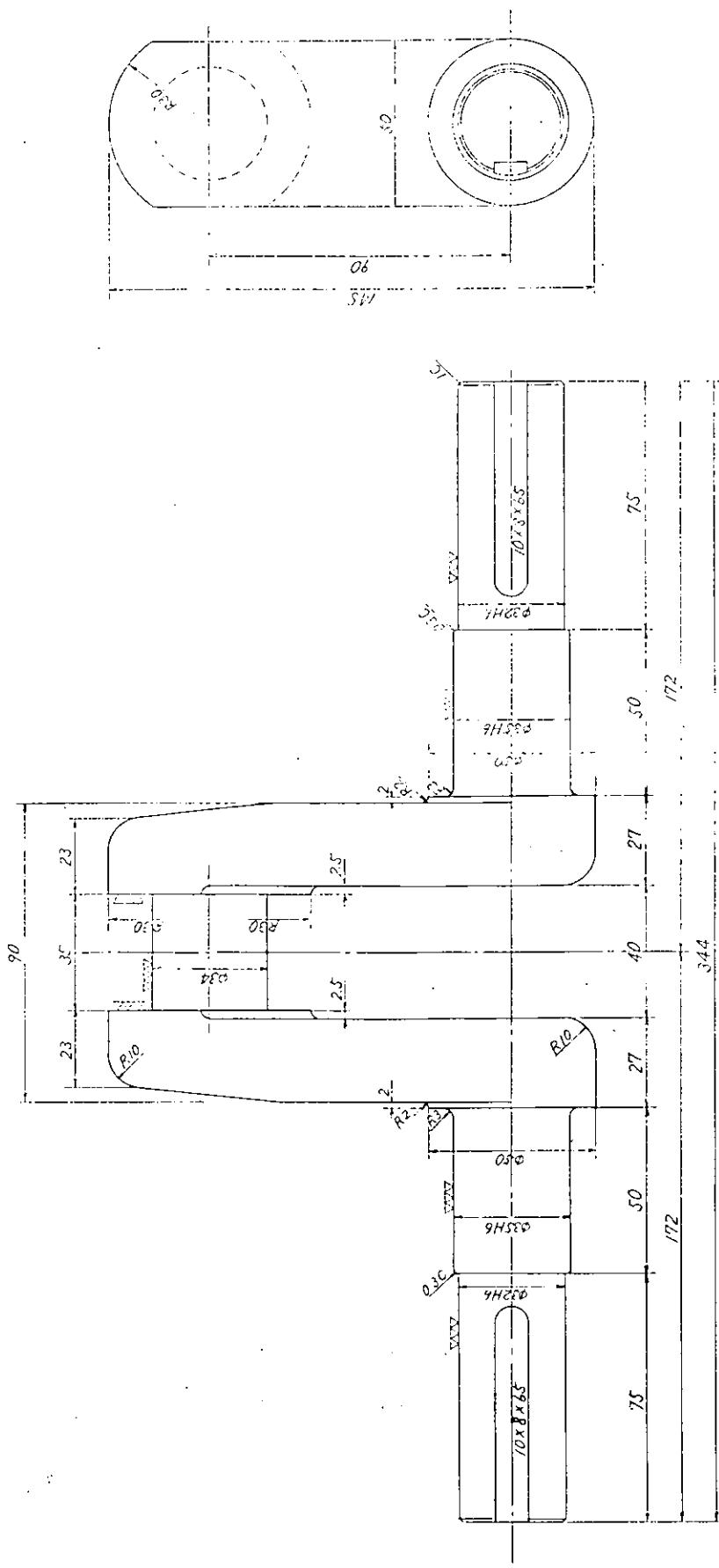


図 3.25 — サイクル非定常実験装置・クランクシャフト

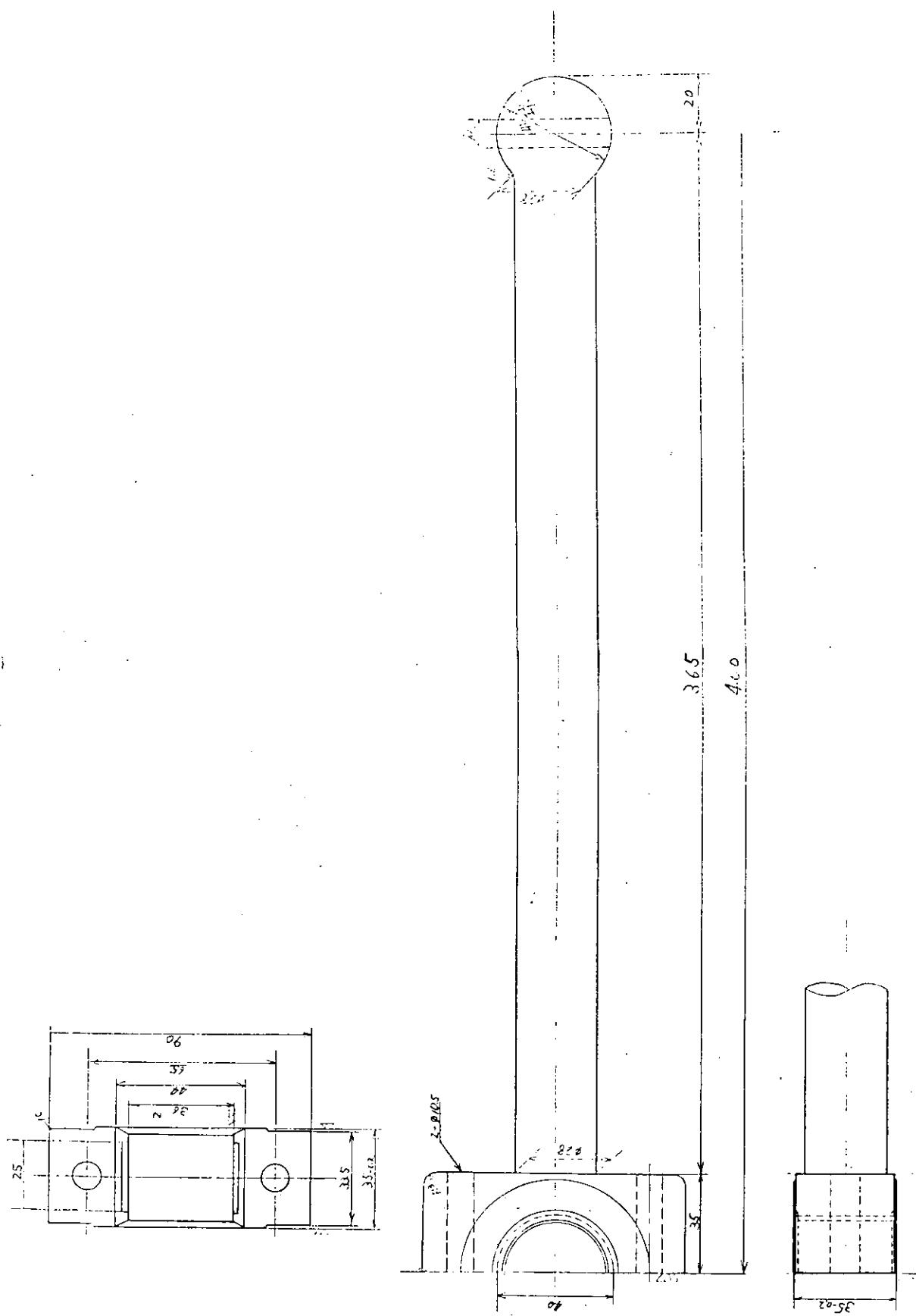


図 3.26 一サイクル非定常実験装置・コネクティングロッド

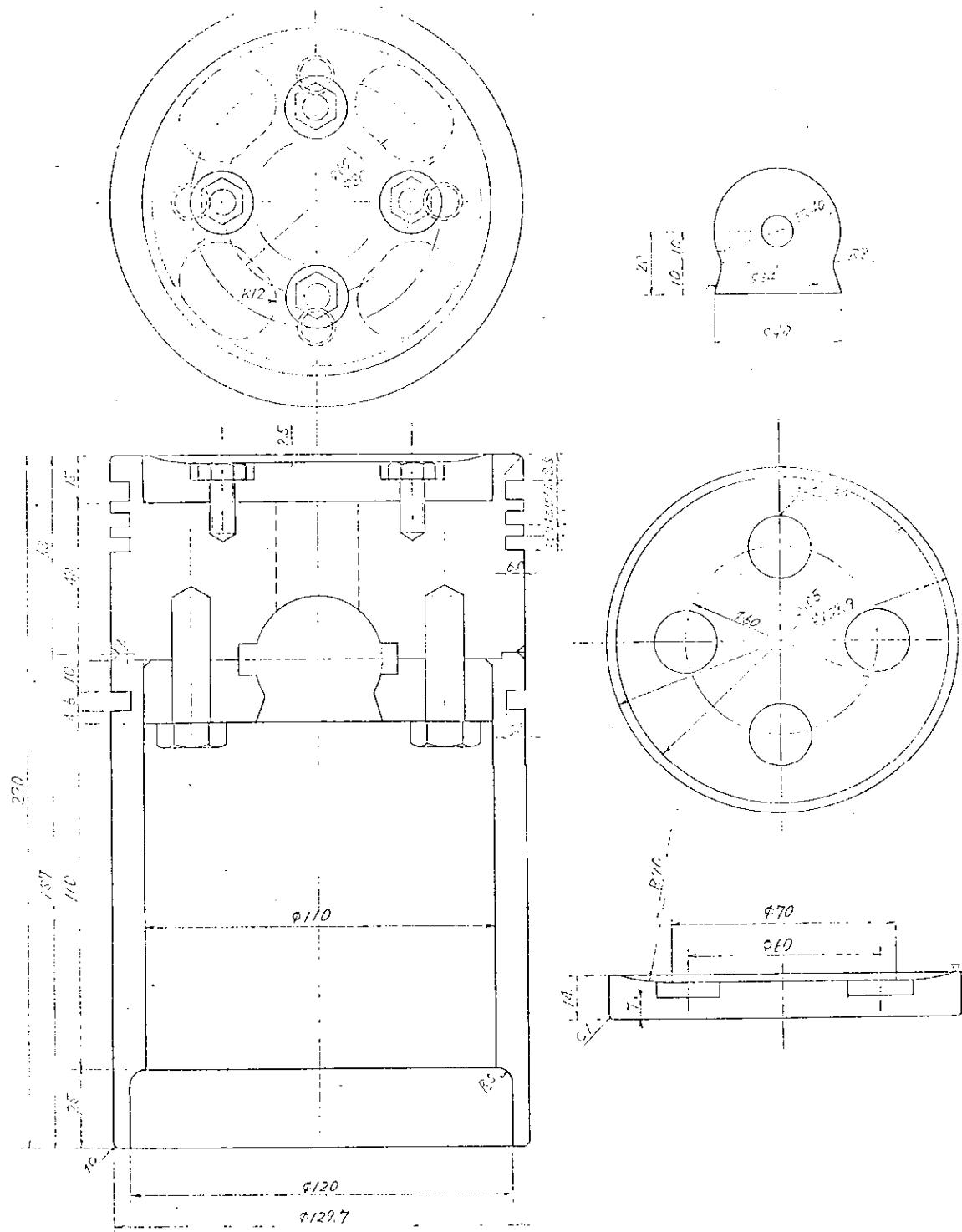


図 3.27 一サイクル非定常実験装置・ピストン

## 第4編 四サイクル機関の排気脈動シミュレーションの研究

### 1. まえがき

船用四サイクル中速機関では、ほとんど動圧過給方式が採用され、排気管内の脈動現象の解明は機関の性能向上のためには重要な問題である。

排気管内の脈動流は排気管長さが比較的短かく、また管径の大きいものに対しては圧力伝播を無視した計算法で良く表現し得るが、排気管長さが長くなると、もはや排気管を1容積として置き換えることは無理となり、管内の状態を場所と時間の関数として表わすことが必要となってきた。

これらのことから、ここでは四サイクル機関の排気脈動をシミュレートする方法として、特性曲線法により一次元の波動方程式の解を得る方法を採用し、单シリンダ機関による実験値とそれによる解との比較検討、分岐、合流部の取りあつかい方の検討を経て、最終的には多シリンダ機関の排気管内脈動流のシミュレーションを完成させようとするものである。

本研究に関して今年度は、今まで船舶技術研究所で研究を進めてきた空気モデルに対するシミュレーションを单シリンダ機関のシミュレーションに変えるために数式モデル、計算フロー、境界条件等の検討を行ない、またそれと比較検討させるため单シリンダ機関により排気管内脈動圧力のデータを取った。以下これらについて述べる。

### 2. 計算プログラムの整理、作成

当所では、今年度より電子計算機がFACOM 270/20(紙テープ入力)からTOSBAC-5600(カード入力)に変更したため、従来の紙テープをカードに変更し、それに伴なう細部の命令の補正、追加を行なった。また、排気管入口条件としては、従来は入口空気タンクの圧力、温度を一定としていたが、これを各クランク角度におけるシリンダ内圧力、温度をとるようにし、弁開口面積も排気弁リフトから計算するようにした。

管内の非定常流についてはいくつかの解法があるが、ここでは特性曲線法を電子計算機で数値的に解く方法を採用した。その手法については、日本船用機関学会誌 第8巻第9号(昭和48年9月)のべており、そこで空気モデルによる実験との対比を行なったのでここでは省略する。しかし今回は前記したように排気管の入口条件として実機を対象とし、そのため弁上流の条件としてシリンダ内圧力、温度を取るようとした。数値計算のフローチャートを図4.1に示した。

### 3. 四サイクル単筒機関によるデータ採取

空気モデルによる計算結果と実験結果については、前記日本船用機関学会誌に載せてあるように良好な一致を見たので、今回は実験機関と計算結果の比較を行なうため、船舶技術研究所にある単筒四サイクル機関で実験を行ない、シリンダ内圧力、排気管内脈動圧(3ヶ所)を採取した。

使用した機関の主要目は次の通り。

型式：4サイクル単動立形無氣噴油式

シリンダ数：1

シリンダ径：275 mm

ピストン行程 : 400 mm  
 出力(無過給) : 80 PS  
 回転数 : 500 r.p.m.  
 燃焼方式 : 直接噴射式  
 排気管径 : 5 in  
 排気管長さ : 3900 mm  
 排気管出口ノズル径 : 64φ, 53φ, 45φ  
 脈動圧採取位置(排気弁出口より) : 350 mm, 2200 mm, 3800 mm  
 (排気弁出口より 1.0 m の位置に 90° の曲りあり)

図 4.2 に排気管内圧力測定概略図を示す。

実験条件は船用特性の 25, 50, 75, 100% の 4 条件である。シリンダ内圧力、排気管内脈動圧はストレーンゲージ型ピックアップにより取り、データレコーダに記録された。

結果の数例を図 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 に示す。

#### 4. 上記機関のデータと計算値との比較

排気管内の脈動の計算にはシリンダ内のガス条件(圧力、温度、ガス重量等)が排気弁上流の条件として必要である。

ここでは排気弁開き始め時のシリンダ内圧力を実験値から求め、それを基準値とする方法を取った。その時の温度、ガス重量は不明であるので適当に仮定した。本来はこれら圧力、温度、ガス重量等はエンジンシミュレーションよりクランク角ごとに与えられるものであるが、実験機関のデータと合わせるためこの様な方法を取った。排気弁が開き始めてからの圧力、温度等はガス交換時のシミュレーションを行ない。それより求める方法を取った。

##### A [ 排気弁開き始めの値 ]

$p_1$  — 実験値から求める。

$W_1$  — 圧縮始めの条件と燃料消費率から求める。

$T_1$  — 完全ガスとして状態式より求める。

$$W_1 = W_f + \frac{p_o V_o}{R T_o} \quad (1)$$

添字 0 : 圧縮始めの状態

$f$  : 1 サイクルに噴射する燃料の量

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{W_1 R} \quad (2)$$

1 : 排気弁開き始めの値

(1) 式は圧縮始めの状態が正確ではないので誤差が大きくなることが考えられる。この時(2)式の  $T$  も変る。結果として排気管内の条件も変り、実験値とくらべて  $T$ 、 $p$  が大きく異なる時は  $T_1$  を変えることもある。

##### B [ ガス交換時の $p$ 、 $W$ 、 $T$ の値 ]

ガス交換時の  $p$ 、 $W$ 、 $T$  は、上記  $p_1$ 、 $W_1$ 、 $T_1$  を初期値とし、次の関係式より求める。

ここでは、ガス定数  $R$ 、比熱  $C_p$ 、 $C_v$ 、比熱比  $\kappa$  は一定とする。

- ガス圧力は実測値を用いる。

$$p = W R T / V \quad (3)$$

$$\frac{dp}{d\theta} = p \left( \frac{1}{W} \frac{dW}{d\theta} + \frac{1}{T} \frac{dT}{d\theta} - \frac{1}{V} \frac{dV}{d\theta} \right) \quad (4)$$

・ ガス重量は質量保存の法則より求める。

$$W = W_1 + \int_0^t G_{in} dt - \int_0^t G_{out} dt \quad (5)$$

$$\frac{dW}{d\theta} = G_{in} \frac{dt}{d\theta} - G_{out} \frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\omega} (G_{in} - G_{out}) \quad (6)$$

$G_{in}$  : 吸入空気流量 (Kg/sec)、 $G_{out}$  : 排出空気流量 (Kg/sec)

$\omega$  : 角速度 ( $2\pi N / 60$  rad/sec)

$G_{in}$ 、 $G_{out}$ は弁面積、吸気管圧力、シリンダ内圧力、排気弁直後の圧力、それぞれのガス温度、流量係数の関数として求められる。そしてその方程式は各瞬間定常として、ノズルを通る圧縮性流体の式を使う。

・ ガス温度は熱力学の第1法則を使用する。

$$dQ = dU + Ap dV \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\theta} &= \frac{dU}{d\theta} + Ap \frac{dV}{d\theta} \\ &= C_v T \frac{dW}{d\theta} + C_v W \frac{dT}{d\theta} + Ap \frac{dV}{d\theta} \end{aligned} \quad (8)$$

これより、

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{1}{C_v W} \left( \frac{dQ}{d\theta} - C_v T \frac{dW}{d\theta} - Ap \frac{dV}{d\theta} \right) \quad (9)$$

(9)式中の  $dQ/d\theta$  は(伝熱により与えられる熱量)と(ガス交換時の質量入出流によるエンタルビの差)で表わされる。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\theta} &= h \cdot F (T_w - T) \frac{dt}{d\theta} + (G_{in} C_p T_{in} - G_{out} C_p T) \frac{dt}{d\theta} \\ &= \frac{1}{\omega} \left\{ h \cdot F (T_w - T) + G_{in} C_p T_{in} - G_{out} C_p T \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

$h$  : 热伝達率、 $F$  : シリンダ内表面積

・ シリンダ容積の変化は次のとおり。

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{S}{2} \left\{ 1 - \cos \theta + \frac{1}{4\lambda} (1 - \cos 2\theta) \right\} + V_c \\ \frac{dV}{d\theta} &= \frac{V_{st}}{2} \left\{ \sin \theta + \frac{1}{2\lambda} \sin 2\theta \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

結局、(6)、(9)、(10)、(11)を連立させて解くことにより、 $p$ 、 $W$ 、 $T$ が求まる。しかしながら(6)、(10)式には $G_{out}$ が入っており、結局はこれより  $v_{out}$  を求めれば排気管内の脈動流計算の入口条件を与えることができる。

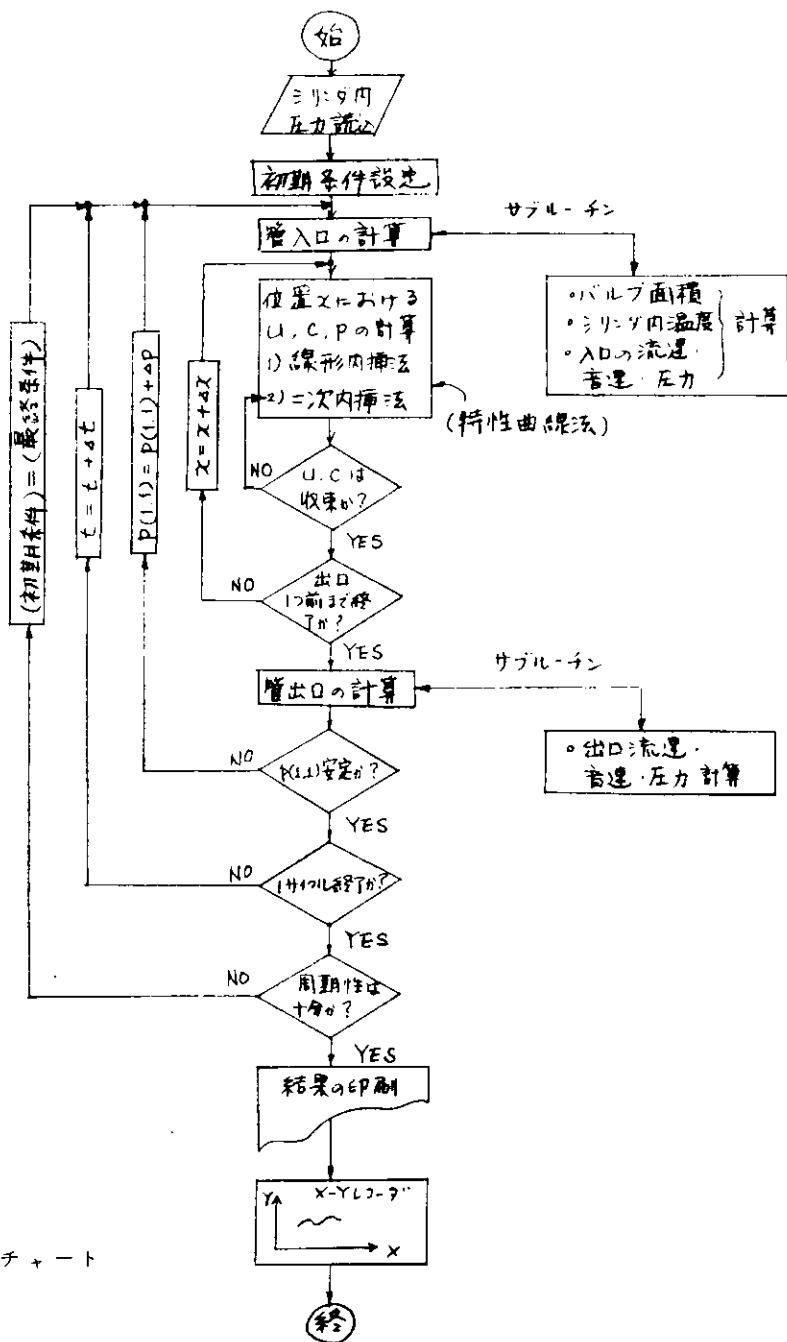
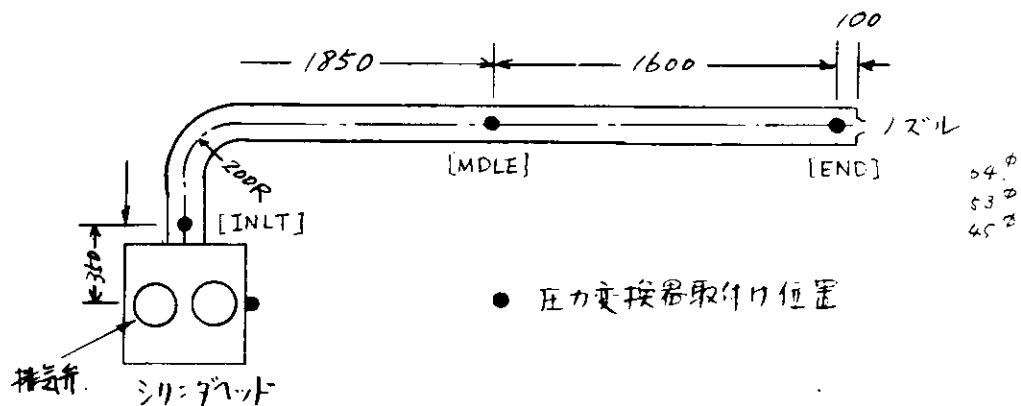
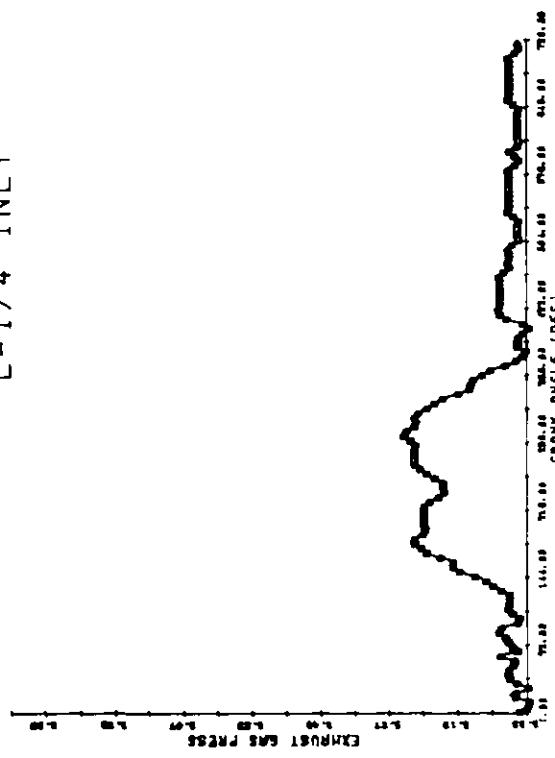


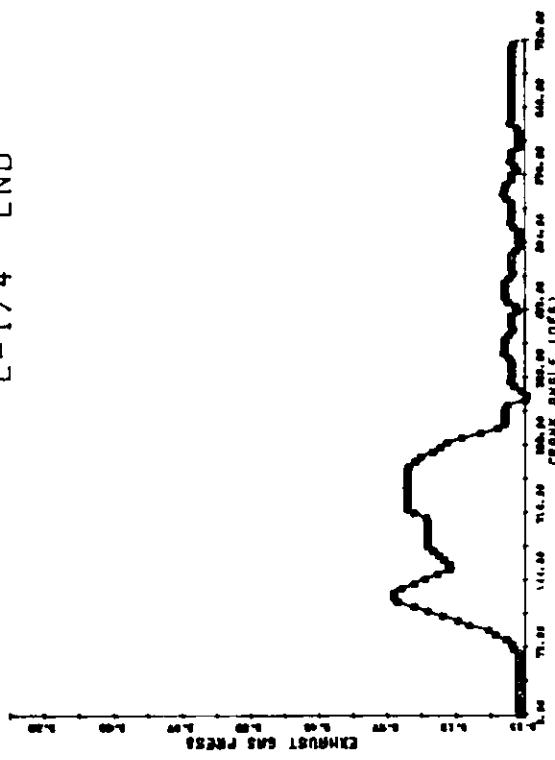
図 4.1 数値計算のフローチャート



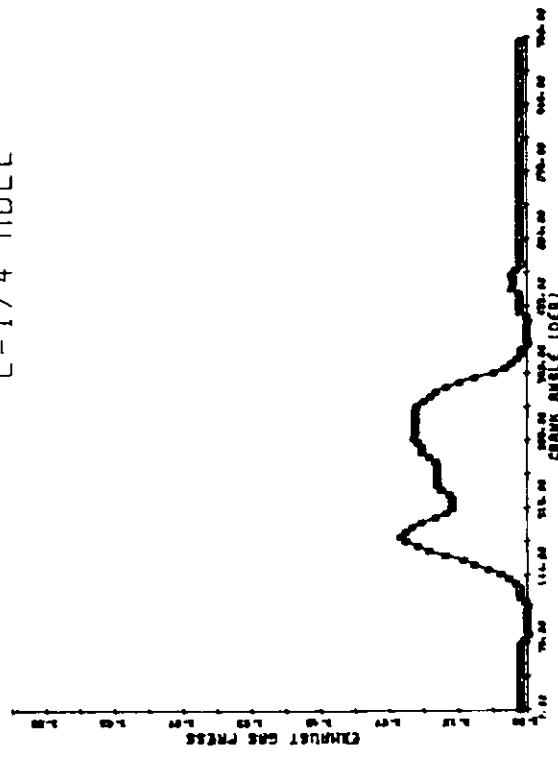
$L = 1/4$  INIT



$L = 1/4$  END



$L = 1/4$  MOLE



LOAD 1/4

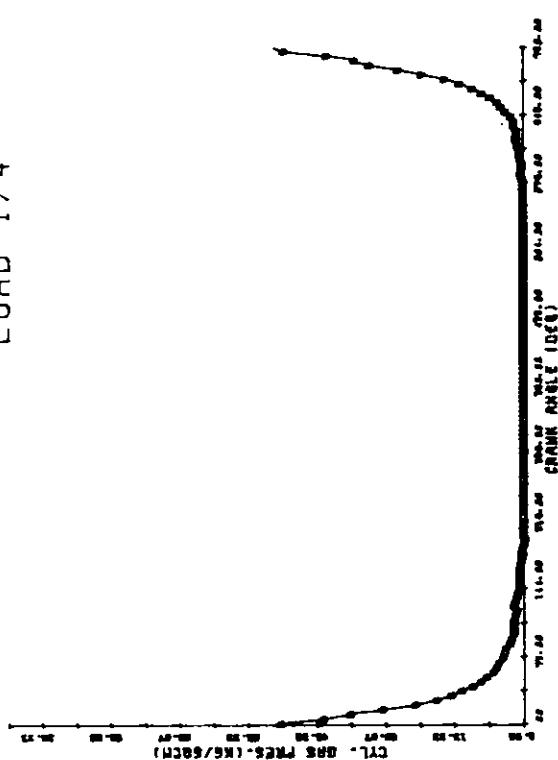
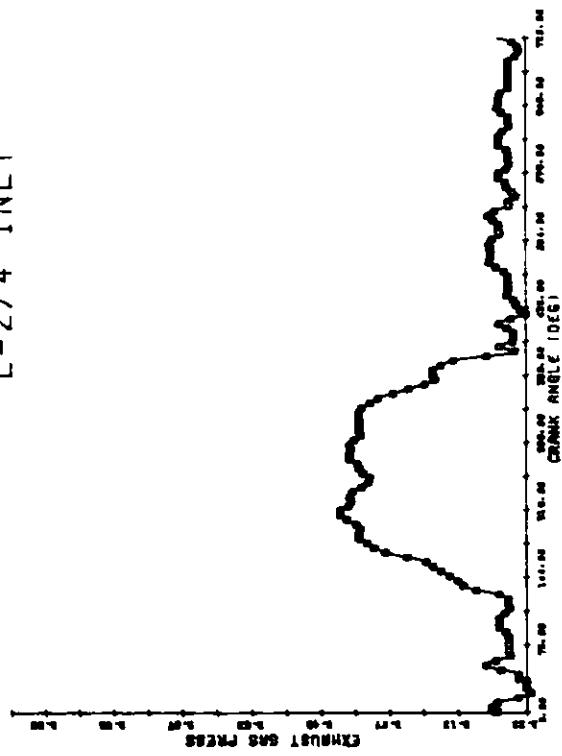
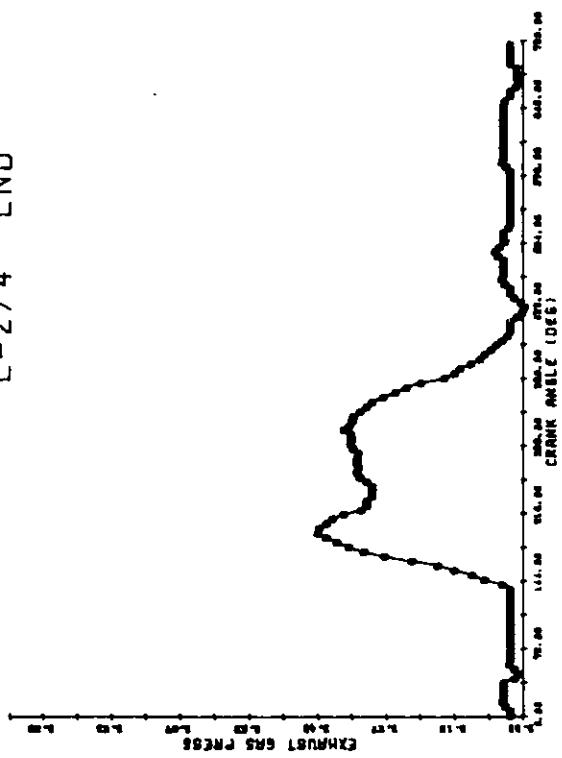


図 4.3 シリンダ内圧力と排気管内圧力(実験データ 1/4 負荷)

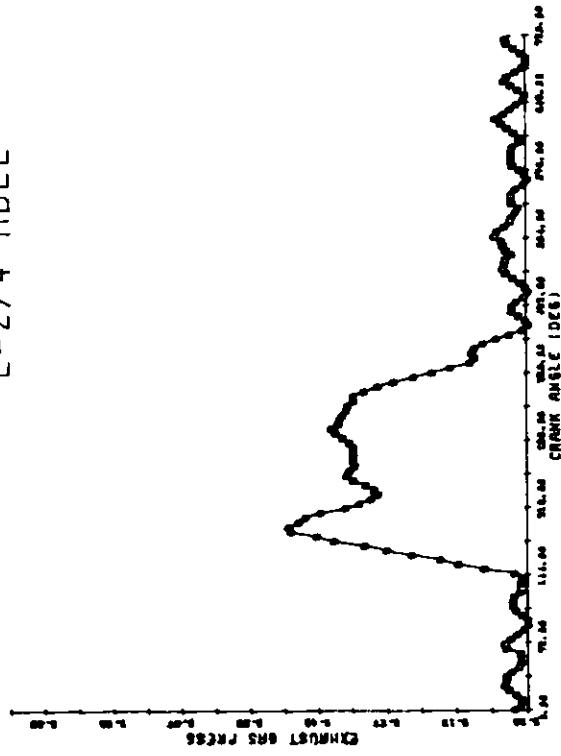
L = 2 / 4 INT



L = 2 / 4 END



L = 2 / 4 MDLE



LOAD 2 / 4

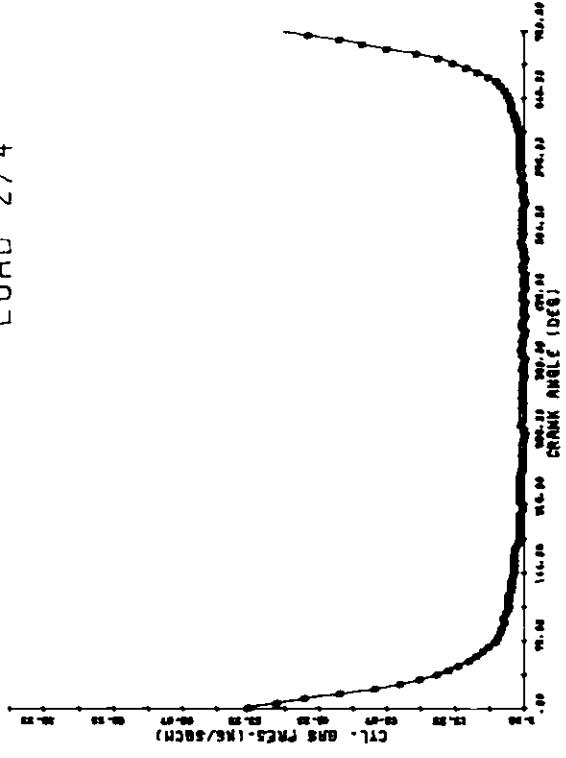
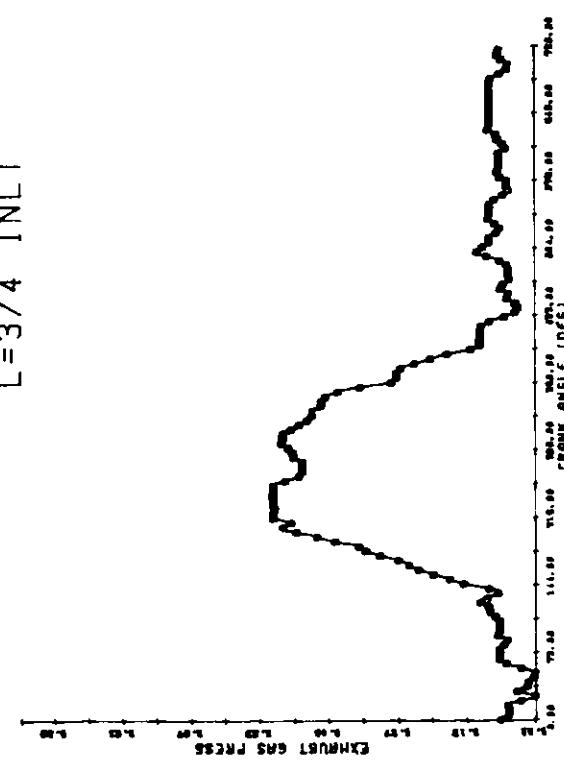
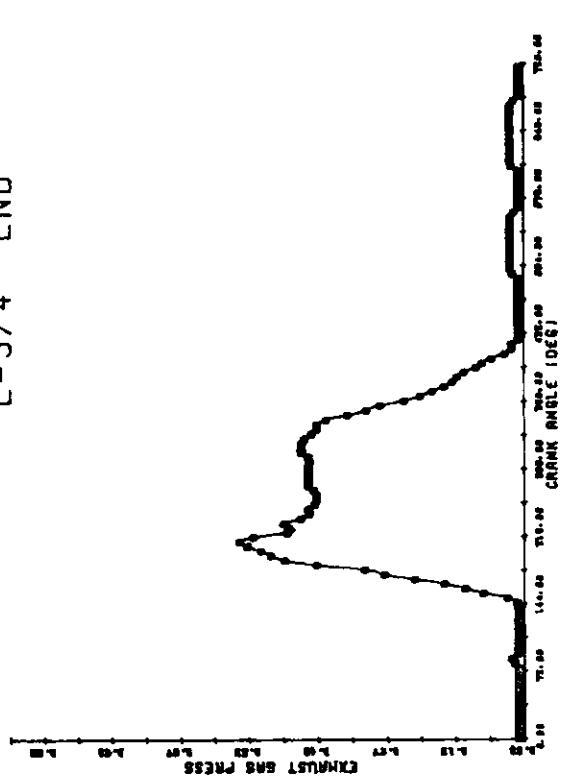


図 4.4 シリンダ内圧力と排気管内圧力(実験データ 2/4 負荷)

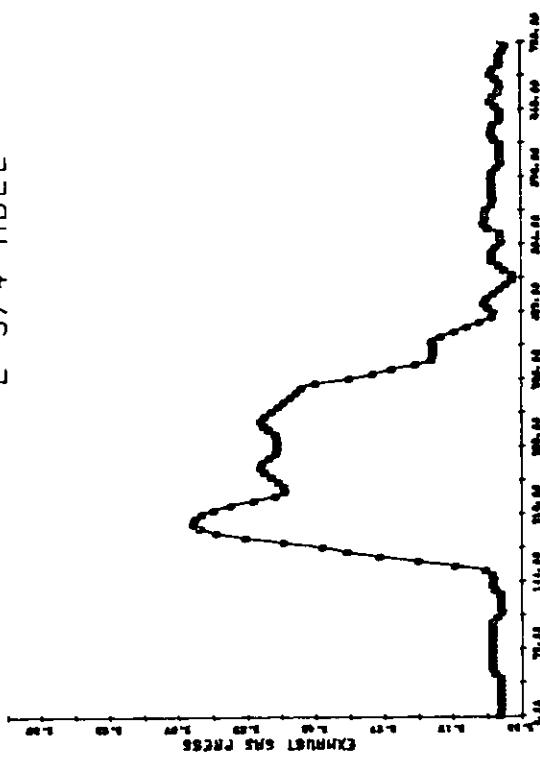
L = 3 / 4 INLT



L = 3 / 4 END



L = 3 / 4 MDLE



LOAD 3 / 4

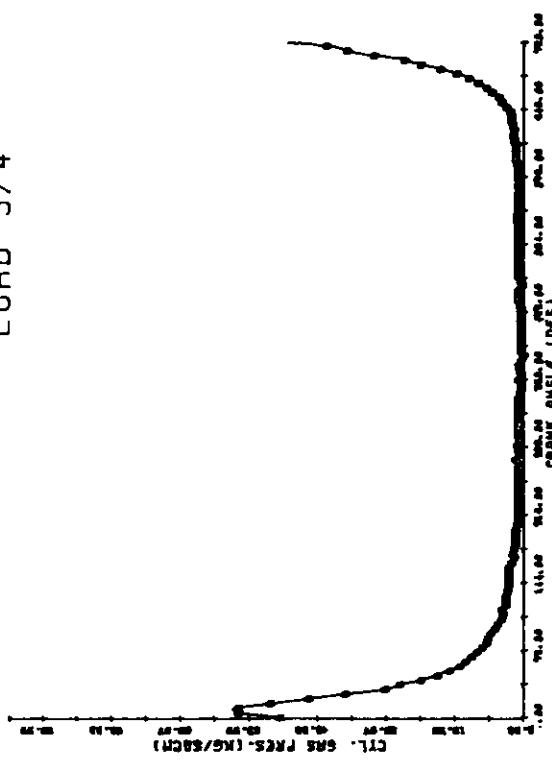
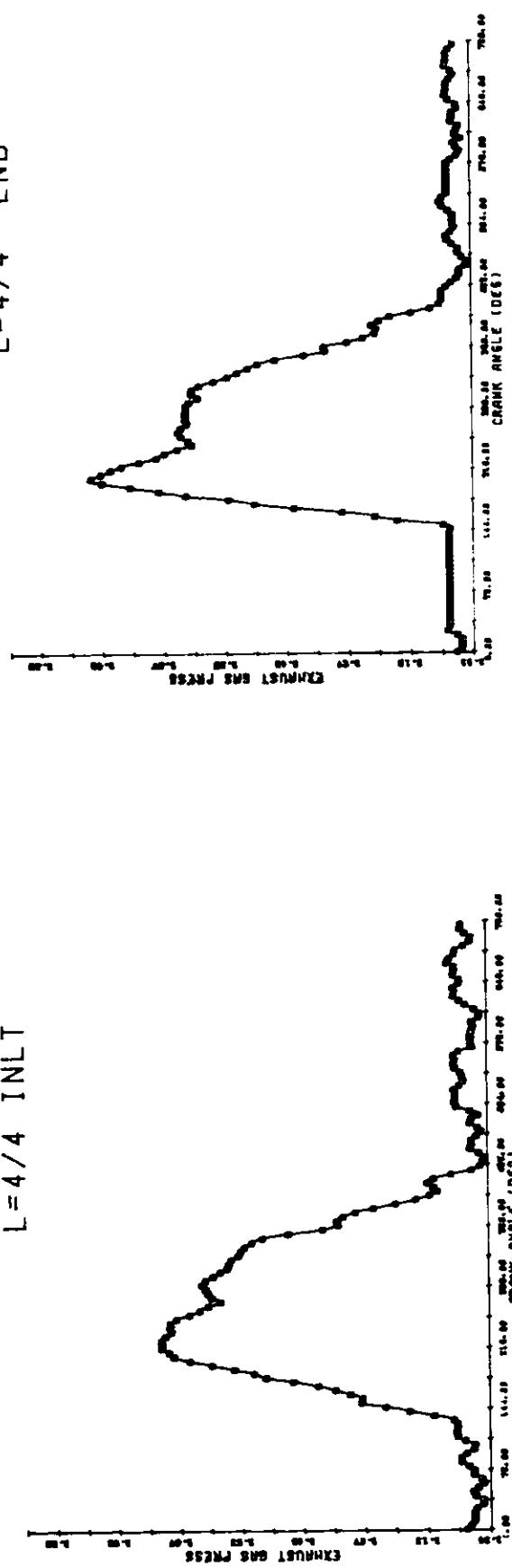


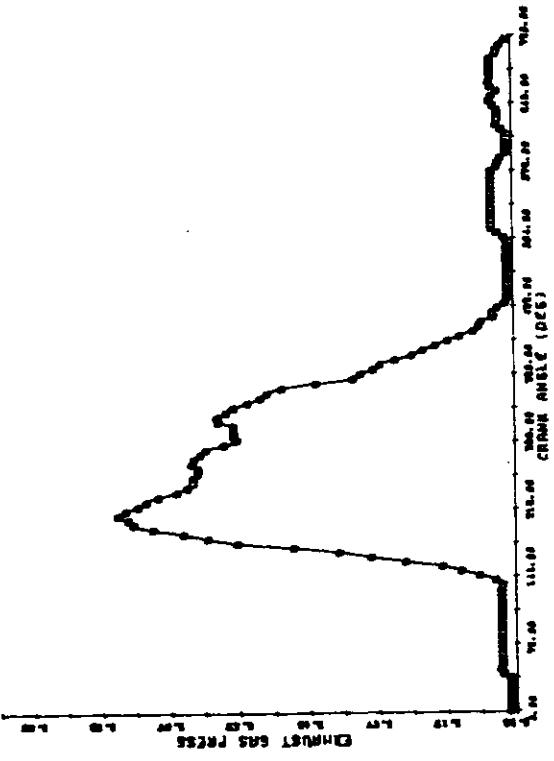
図 4-5 シリンダ内圧力と排気管内圧力（実験データ 3/4 負荷）

L = 4 / 4 END

L = 4 / 4 INIT



L = 4 / 4 MDLE



LOAD 4 / 4

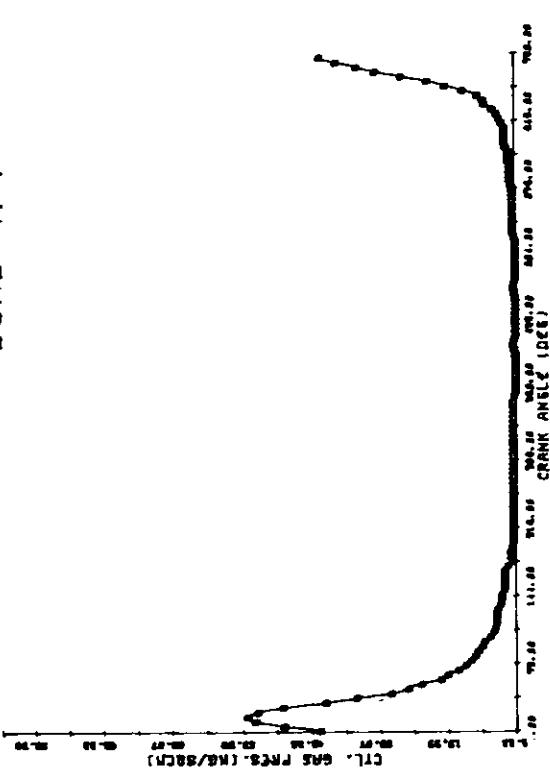


図 4.6 シリンダ内圧力と排気管内圧力(実験データ 4/4 負荷)